Frege: Introdução ao Logicismo

Alessandro Bandeira Duarte
UFRRJ
dedekindbr@alessandroduarte.com.br

1 de dezembro de 2015

- Gottlob Frege (1848-1925) foi um matemático alemão cujo principal interesse dentro desse campo do conhecimento residia na questão sobre os Fundamentos da Aritmética, o que acabou obrigando-o a entrar em questões sobre Lógica, Filosofia da Matemática e Filosofia da Lógica (Filosofia da Linguagem?).
- É lugar comum dizer que Frege defendeu uma tese em relação à aritmética denominada de Logicismo, segundo a qual se poderia reduzir esta ciência à Lógica.
- Para atingir este objetivo, Frege escreveu 3 livros, a saber: *Begriffsschrift* (1879), *Grundlagen der Arithmetik* (1884) e *Grundgesetze der Arithmetik* (1893,1903)

- Em *Begriffsschrift* (BS), Frege apresentou uma linguagem artificial (*begriffsschrift*) e um conjunto de leis lógicas e regras de inferências que constituem algo similar ao que hoje chamamos de lógica de predicados de segunda ordem. Além disso, Frege define 4 conceitos aritméticos (hereditariedade, ancestral forte, ancestral fraco e função) a partir dos primitivos lógicos de BS.
- Em *Grundlagen der Arithmetik* (GLA), Frege discutiu a natureza dos números cardinais e, em particular, dos números cardinais finitos (números naturais); propõe o *Princípio de Hume* (Princípio de Cantor) como sendo uma lei fundamental; e define os conceitos de *número natural*, *sucessor* e define os números naturais *zero* e *um*; esboça provas de teoremas similares aos Axiomas de Peano (GLA foi escrito em linguagem natural).

- *Grundgesetze der Arithmetik* (GGA) seria a magnum opus de Frege na qual ele derivaria as leis aritméticas dentro da *begriffsschrift*. Contudo, em 1902, quando estava próximo de ser publicado o segundo volume de GGA, Frege recebeu uma carta de Bertrand Russell em que este mostrava-lhe que uma contradição era derivada na *begriffsschrift* junto com o famoso axioma V, colocando um fim no projeto Fregeano.

- O projeto Fregeano deve ser inserido dentro do movimento matemático denominado de *Aritmetização da Análise* que estava ocorrendo no século XIX. A ideia básica do movimento era tornar a Análise (e a Aritmética) um campo matemático autônomo. Antes desse movimento, uma série de teoremas dessa ciência eram provados recorrendo-se às evidências ou intuições geométricas. Vejamos uma passagem do livro de Richard Dedekind:

- De acordo com a Aritmetização, os teoremas da análise deveriam ser provados por meios puramente aritméticos, acarretando em um processo de busca de definições "aritméticas" do conceito de número real.

- No livro *Continuity and Irrational Numbers* (1872), por exemplo, Dedekind assume os números racionais e suas propriedades como já conhecidas e, a partir daí, ele mostra como definir - ou criar, sua palavra preferida - os números irracionais[1].

[1] Dedekind obtém os números irracionais por meio de cortes de números racionais. Em termos modernos, um corte é um conjunto X de números racionais que deve satisfazer as seguintes condições: (1) X não é vazio e é um subconjunto próprio do conjunto dos números racionais; (2) X é fechado "para baixo", isto é, se x for um número racional que pertence a X e y for um número racional que é menor que x, então y pertencerá a X; e (3) X não tem maior elemento. O seguinte conjunto representa um corte: o conjunto dos números racionais x que são menores que 0 (racional) — $\{x : x < 0\}$. Este conjunto não é vazio e é um subconjunto próprio do conjunto dos números racionais. Claramente, este conjunto é fechado "para baixo". E este conjunto não tem maior elemento. Este último fato é provado, porque os números racionais formam um conjunto denso. Assim, dado um número racional z muito próximo do número racional 0 é possível construir um outro número z' tal que $z < z' < 0$. Este corte define o número real 0.

- Não é meu objetivo entrar aqui nos detalhes do procedimento de Dedekind, o que quero enfatizar é que a aritmetização sugerida por ele neste livro só poderia ser bem-sucedida, se os números racionais pudessem ser definidos e suas propriedades pudessem ser derivadas por meios puramente aritméticos. Em outras palavras, se a definição dos números racionais e as provas de suas propriedades dependessem da intuição geométrica, o processo de aritmetização da análise estaria fadado ao fracasso. De alguma forma, a Análise dependeria da Geometria e não seria uma ciência autônoma

- Portanto, os números racionais deveriam ser definidos também por meio puramente aritméticos e os teoremas provados sem recorrer a qualquer intuição geométrica.

Assumindo os números naturais (e os axiomas de Dedekind-Peano), é possível definir os números racionais a partir daqueles. Landau, por exemplo, no seu livro *Foundations of Analysis* (1966)[2], assume os axiomas de Dedekind-Peano e prova uma série de fatos sobre os números naturais[3]

[2]Landau, Edmund (1966). *Foundations of Analysis*. 3 edição (New York: Chelsea).

[3]Dentre estes, os mais importantes são: as leis comutativas e associativas da adição e da multiplicação, a transitividade da relação de ordenação (*ser maior que*) e a lei distributiva da multiplicação sobre a soma.

Depois, ele define uma fração como um par de números naturais:

$$\frac{x_1}{x_2} =_{def} (x_1, x_2),$$

onde x_1 e x_2 são números naturais[4].
Então, Landau define quando duas frações são equivalentes:

$$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2} =_{def} x_1.y_2 = y_1.x_2$$

[4] Landau assume que o primeiro número natural é o 1. Assim, ele não necessita restringir o denominador da fração.

A partir das definições acima e das propriedades dos números naturais, Landau define ordenação[5], adição, multiplicação[6] e diferença[7] em relação às frações.

[5]Uma fração $\frac{x_1}{x_2}$ é maior que uma fração $\frac{y_1}{y_2}$ quando $x_1.y_2 > y_1.x_2$, onde '$>$' é a relação 'maior que' definida para os números naturais. Como x_1, x_2, y_1 e y_2 são números naturais, a relação acima depende da multiplicação dos números naturais e da relação de ordenação entre números naturais.

[6]A multiplicação entre frações é definida por meio da multiplicação entre números naturais: $\frac{x_1}{x_2} \times_f \frac{y_1}{y_2} =_{def} \frac{x_1.y_1}{x_2.y_2}$.

[7]A definição da diferença entre frações depende do seguinte teorema (teorema 67, pág. 29): dadas duas frações $\frac{x_1}{x_2}$ e $\frac{y_1}{y_2}$, se a primeira é maior que a segunda, então existe uma única fração $\frac{u_1}{u_2}$ cuja soma com $\frac{y_1}{y_2}$ é equivalente a $\frac{x_1}{x_2}$. Esta fração $\frac{u_1}{u_2}$ é chamada a diferença entre $\frac{x_1}{x_2}$ e $\frac{y_1}{y_2}$.

Por exemplo, a adição entre duas frações $\dfrac{x_1}{x_2}$ e $\dfrac{y_1}{y_2}$ é definida por:

$$\frac{x_1}{x_2} +_f \frac{y_1}{y_2} =_{def} \frac{x_1.y_2 + y_1.x_2}{x_2.y_2}$$ [8]

A lei comutativa da adição entre frações, isto é,

$$\frac{x_1}{x_2} +_f \frac{y_1}{y_2} \sim \frac{y_1}{y_2} +_f \frac{x_1}{x_2}$$

depende apenas das propriedades comutativas da soma e da multiplicação entre números naturais.

[8] Landau não usa um símbolo diferente para adição entre frações.

Assuma que

$$\frac{x_1}{x_2} +_f \frac{y_1}{y_2}.$$

Pela definição da adição entre frações, temos

$$\frac{x_1.y_2 + y_1.x_2}{x_2.y_2}$$

Pela lei comutativa da adição dos números naturais, isso é equivalente a

$$\frac{y_1.x_2 + x_1.y_2}{x_2.y_2}.$$

E pela comutatividade da multiplicação dos números naturais, a fórmula acima é equivalente a

$$\frac{y_1.x_2 + x_1.y_2}{y_2.x_2}.$$

Mas, novamente, pela definição da adição entre frações, essa fórmula é equivalente a

$$\frac{y_1}{y_2} +_f \frac{x_1}{x_2}.$$

- Em seguida, Landau define um número racional (positivo) como o conjunto de todas as frações equivalentes a alguma dada fração. Dados os números racionais (positivos), ele define a ordenação, adição e multiplicação entre eles. A adição e multiplicação dos números racionais são comutativas e associativas.
- Landau prova o seguinte teorema: se um número racional X for maior que um número racional Y, então existirá um único número U tal que $Y + U = X$. Este teorema é provado, usando-se o teorema análogo em relação às frações. Com este teorema a sua disposição, Landau define, então, a diferença entre dois números racionais, que é justamente este número racional U, obtendo, desse modo, todos os números racionais.

- A discussão informal acima tem o único propósito de evidenciar que a aritmetização da Análise depende, em última instância, dos números naturais e suas propriedades [9], depende da autonomia da Aritmética dos números naturais. Se os números naturais fossem dados pela intuição geométrica, então a Análise seria dependente, de alguma forma, da Geometria.

[9] Na verdade, implicitamente é assumida a existência de outros objetos matemáticos: pares ordenados de números naturais e conjuntos de números racionais. Na teoria de conjuntos, pares ordenados são também reduzidos a certos tipos de conjunto. Os números naturais, inteiros, racionais e reais também são certos tipos de conjuntos. Ou seja, na teoria de conjuntos, a aritmética inteira é reduzida aos conjuntos e suas propriedades.

- O processo de aritmetização tem um forte aspecto reducionista. Os números reais e suas propriedades são reduzidos aos números racionais (conjuntos de racionais) e suas propriedades. Estes são reduzidos aos números naturais e suas propriedades. Portanto, os números reais são reduzidos aos números naturais e suas propriedades. Por exemplo, Dedekind (1963) escreve:

> Just as negative and fractional rational numbers are formed by a new creation, and as the laws of operating with these numbers must and can be **reduced** to the laws of operating with positive integers, so we must endeavor completely to define irrational numbers by means of the rational numbers alone. The question only remains how to do this (Dedekind, 1963, p. 10, nosso grifo).

- O empecilho ao processo de aritmetização — extirpar qualquer tipo de intuição da aritmética —, é que, na *Crítica da Razão Pura* (**CPR**), Kant argumentou a favor da tese segundo a qual a matemática pura é sintética a priori[10]. Isto significava que, embora esta ciência não dependesse de fatos empíricos para provar suas proposições, ela seria dependente das intuições puras de tempo e de espaço (**CPR**, B 14-16; A 39/ B 55-6; A 716/B 744). Portanto, em particular, a Aritmética dos números naturais dependeria de algum tipo de intuição

[10] Na introdução de **CRP** (A6-10/B10-14), Kant faz a distinção entre juízos analíticos e sintéticos. A principal característica que um juízo sintético tem é a de estender nosso conhecimento, enquanto juízos analíticos seriam meras identidades, a partir das quais nada novo é obtido. Os juízos da matemática, em particular, da aritmética, parecem estender o nosso conhecimento. Este fato exclui, de acordo com Kant, que seus juízos sejam analíticos.

- É dentro desse contexto que Frege propõe o logicismo, buscando reduzir a aritmética dos números naturais à lógica. Kant, certamente, concordaria que lógica formal não dependeria de qualquer intuição e, portanto, a redução da aritmética à lógica formal implicaria o caráter não-intuitivo daquela. Resta saber se Kant aceitaria a *begriffsschrift* como sendo lógica formal!

- Antes da publicação de *Begriffsschrift*, Frege escreveu uma tese sobre geometria projetiva[11] na qual ele tenta explicar como é possível fazer referências e entender teoremas sobre figuras geométricas imaginárias (ponto no infinito), o que já caracteriza um certo projeto epistêmico.
- Um ano depois ele escreveu seu *Habilitationsschrift*[12], no qual é apresentado os germes do projeto Logicista.
- Frege defendeu, pela primeira vez, o caráter não-intuitivo da Aritmética e a sua independência em relação à Geometria. Após afirmar que o conceito de quantidade, antes concebido geometricamente, tornou-se problemático, senão impossível, com a introdução de quantidades negativas e imaginárias, ele escreve:

[11] *On a Geometrical Representation of Imaginary Forms in the Plane* (1873)
[12] *Methods of Calculation based on an Extension of the Concept of Quantity* (1874)

All that has remained is certain general properties of addition, which now emerge as the essential characteristic marks of quantity. The concept has thus gradually freed itself from intuition and made itself independent. This is quite unobjectionable, especially since its earlier intuitive character was at bottom mere appearance.[13]

[13] Frege, G. Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy. Editado por Brian McGuinness e traduzido por Max Black, V. H. Dudman, Peter Geach, Hans Kaal, E. H. W. Kluge, Brian McGuinness e R. H. Stoothoff. (Oxford: Basil Blackwell), p 56.

If a beginner is shown how to add angles, then he knows what they are. And it is clear that a concept as comprehensive and abstract as the concept of quantity cannot be an intuition. There is accordingly a noteworthy difference between geometry and arithmetic in the way in which their fundamental principles are grounded. The elements of all geometry constructions are intuitions, and geometry refers to intuition as the source of its axioms. Since the object of arithmetic does not have an intuitive character, its fundamental propositions cannot stem from intuition either[14]

[14] Ibidem, pp. 56-7.

If, as we have shown, we do not find the concept of quantity in intuition, but create it ourselves, then we are justified in trying to formulate its definitions so as to permit as manifold an application as possible, in order to extend the domain that its subject to arithmetic as far as possible[15]

[15] Ibidem, pp. 57.

- Nas três passagens acima, Frege rejeita nitidamente que a intuição, seja temporal, espacial ou de qualquer outro tipo, desempenha algum papel nas definições dos conceitos aritméticos, já que a aritmética trata daquilo que é abstrato, não-intuitivo

Begriffsschrift — Preliminares

- Mas o que há de importante nesse texto de 1874?
- o conceito de operação (ou função) desempenha um papel fundamental e, muito provavelmente, foi a partir disto que Frege chegou em sua análise dos conteúdos conceituais em termos de função e argumento.
- De acordo com Frege, os números naturais são um tipo especial de quantidades. Todavia, ele não explica em detalhes como eles seriam definidos, indicando apenas que os números 2, 3, 4, ... poderiam ser obtidos a partir de 1 e da repetição de uma mesma operação, a função sucessor.

- Se designarmos esta função (ou operação) por fx, então temos que $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$, etc.. Mas, como $f(1) = 2$, então $f(2) = f(f(1)) = 3$. Uma vez que $f(f(1)) = 3$, então $f(3) = f(f(f(1))) = 4$, e assim por diante[16]. Há uma conexão disto com as definições dos números cardinais finitos individuais que foram dadas em GLA2.

[16] A partir da operação fx, a função sucessor, é possível, como o próprio Frege afirma (ibidem, pág. 58), definir o conceito de adição. Assim, 2+3, significa que aplicamos a 2 a operação fx três vezes, ou seja, $f(f(f(2)))$. Mas, como $2 = f(1)$, temos $f(f(f(f(1))))$ que é igual a 5. E a partir do conceito de adição, podemos obter o conceito de multiplicação: 2×3 é a soma de (2+2)+2 ou a soma de 3+3. E a partir da multiplicação podemos obter o conceito de potência: 4^3 é (4×4)×4, que, por sua vez, é (4+4+4+4)+(4+4+4+4)+(4+4+4+4)+(4+4+4+4). Poderíamos reduzir isto a função sucessor.

- há uma íntima conexão entre a obtenção dos números naturais a partir de 1 e da operação iterada fx e as definições dos ancestrais forte e fraco de uma relação que Frege estabeleceu em BS. Provavelmente, foi tentando expressar esta iteração n vezes que Frege deve ter pensado na quantificação de segunda ordem. Em lógica de primeira ordem, não é possível definir o ancestral de uma relação sem introduzir as reticências[17]

[17]"The only conclusion we will draw here is that quantity can also be ascribed to operations. If we repeated an operation f by constantly resubmitting its result to it, we can regard the repeated applications of operations f as new operations. Now it is clear that two or more of the operations obtained in this way, ff, fff, $\ldots$, acting in succession on an object, can always be replaced by a single operation consisting likewise in a repetition of f". (ibidem, pp. 57-8).

- Isto seria feito da seguinte forma: diríamos que a está na relação de ancestralidade forte R com b — $R*(a,b)$ — se e somente se

$$R(a,b) \vee \exists x_1(R(a,x_1)\&R(x_1,b)) \vee$$
$$\exists x_1 \exists x_2(R(a,x_1)\&R(x_1,x_2)\&R(x_2,b)) \vee \ldots$$

- Diríamos que a está na relação de ancestralidade fraca R com b — $R**(a,b)$ — justamente no caso em que

$$R*(a,b) \vee a = b$$

- As reticências nas definições dos ancestrais forte e fraco acima constituiriam lacunas nas provas que Frege desejava completamente extirpar de seu sistema lógico de BS. Neste caso, a quantificação de segunda ordem elimina completamente estas lacunas, permitindo uma definição explícita do ancestral.

- BS é dividida em três partes: na primeira, Frege **explica** as noções lógicas primitivas e a sua regra de inferência e introduz seus respectivos símbolos; na segunda, os axiomas lógicos são apresentados e vários teoremas lógicos são derivados; e na terceira, são introduzidas quatro definições de conceitos aritméticos a partir das quais alguns teoremas matemáticos importantes são inferidos.

- Divisão dos símbolos da *begriffsschrift* entre aqueles que têm significado fixo e aqueles que têm significado indeterminado. Estes últimos serão as letras latinas em itálico: $a, b, c, \ldots x, y, z, f, g, F$
- As letras latinas servem para expressar generalidade (como se faz em álgebra para expressar leis algébricas: $a + b = b + a$