O Papel Formal da Distinção "Sentido e Referência"

1 de dezembro de 2015

Conteúdo Conceitual

- Em *Begriffsschrift*, Frege introduz em §3 a seguinte noção de conteúdo conceitual

  Segundo minha maneira de representar um juízo, não há lugar para a distinção entre sujeito e predicado. Para justificar isto, observo que os conteúdos de dois juízos podem diferir de dois modos: primeiro, pode-se dar que [todas] as consequências deriváveis do primeiro juízo, quando este é combinado com outros juízos determinados, também possam sempre ser derivados do segundo juízo, quando combinado com estes mesmos juízos; segundo, pode-se dar que não seja este o caso. As duas proposições: "Em Platéia os gregos derrotaram os persas" e "Em Platéia os persas foram derrotados pelos gregos", diferem quanto ao primeiro modo. Mesmo que se pudesse reconhecer uma ligeira diferença quanto ao sentido, a concordância ainda assim prevalece[1].

- De acordo com a passagem, os conteúdos conceituais de A e B são idênticos se (?) e somente se A e B têm os mesmo conjunto de consequências

- Em particular, uma vez que A implica A e B implica B, então deveríamos ter: $A \equiv B$ se(?) e somente se A implica B e B implica A

- Essa visão é defendida por exemplo por Michael Beaney (pág.96):

[1] Frege, G (2012). Os Primeiros Escritos Lógicos de Gottlob Frege. São Paulo: Instituto Brasileiro de Filosofia e Ciência "Raimundo Lúlio", p. 60.

But the implication is that the value of a function, in the case of propositions, is what Frege calls the 'conceptual content' ('begrifflicher Inhalt') of the proposition. This notion was introduced in §3 of the Begriffsschrift, where it is characterized as that part of the content of a proposition that influences its possible consequences. On Frege's view, the following propositions have the same conceptual content:

(GP) At Platea the Greeks defeated the Persians

(PG) At Platea the Persians were defeated by the Greeks.

While we might discern "a slight difference of sense" between these two propositions, Frege writes, the content they have in common is what predominates: "I call that part of the content that is the same in both the conceptual content" (1879, p. 3/1997, p. 53). *Essentially, two propositions have the same conceptual content if and only if they are* *logically equivalent* (nosso grifo)[2].

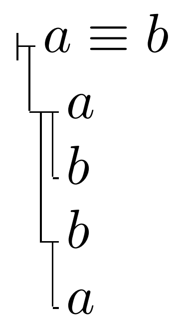
Mais adiante em seu artigo, Beaney (2007, pág. 100) afirma:

> According to Frege at the time of the Begriffsschrift, two propositions have the same conceptual content if and only if they have the same possible consequences (cf. 1879, p. 3/ 1997, p. 54). To say that two propositions P and Q have the same possible consequences is to say that they are logically equivalent, i. e., that P implies Q, and Q implies P. So Frege's criterion can be formulated thus: (CC) *Two propositions have the same conceptual content iff they are logically equivalent* (nosso grifo)

[2] Beaney, Michael (2007). "Frege's Use of Function-Argument Analysis and This Introduction of Truth-Values as Objects". Grazer Philosophische Studien 75, 93-123.

- O problema se encontra na seguinte direção: se P e Q são logicamente equivalentes, então P e Q têm o mesmo conteúdo conceitual.

Simbolicamente, isso seria expresso na conceitografia pela fórmula:



(1)

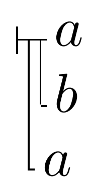
- Conteúdos judicáveis (conteúdos conceituais que podem ser V ou F) são entidades intensionais (na minha visão, conteúdos judicáveis são próximos às proposições Russelianas).

- Nesse caso, se (1) fosse introduzida no sistema, ela implicaria em certas consequências indesejáveis. Assuma que P e Q são teoremas de BS

$$\vdash P \tag{2}$$

$$\vdash Q \tag{3}$$

Com axioma 1 de BS



(Axioma1)

segue-se

$$\vdash\!\!\begin{array}{|l} Q \\ P \end{array} \tag{4}$$

$$\vdash\!\!\begin{array}{|l} P \\ Q \end{array} \tag{5}$$

Uma vez que (1) está presente no sistema (por hipótese), então teríamos: $P \equiv Q$. Ora, como P e Q são quaisquer teoremas de BS, em particular teríamos a seguinte identidade de conteúdos:

$$\vdash \left(\begin{array}{ll} a \equiv & F(y) \\ a & \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\sim}}\ f(x_{\gamma}, y_{\beta}) \\ & \begin{array}{c} \delta \\ | \\ \alpha \end{array} \left(\begin{array}{l} F(\alpha) \\ \\ f(\delta,\alpha) \end{array} \right. \\ & F(x) \end{array} \right) \tag{6}$$

Isso é claramente falso e (1) não é válida (e, portanto, lógica).

- Este problema já tinha sido percebido por Chateaubriand e Landini. De acordo com Chateaubriand

  Moreover, at the end of the preface (p.8) Frege says that he could have combined the two laws of double negation into the single formula

(5) $\vdash (\top\!\top a \equiv a)$,

which suggests that identity can also be used to express something like logical equivalence. Given Frege's conventions on the use of variables (p. 25), (5) is a universally quantified formula that is judged true for all conceptual contents. So for each specific sentence A, the conceptual contents $\top\!\top A$ and $-A$ are the same. *But, obviously, this does not hold for conditionality in general; i.e. from Frege's characterization of conditionality one cannot infer that if the relation of conditionality holds between the contents (of) A and B in both directions, then* $A \equiv B$. Since Frege does not introduce notions of logical implication and logical equivalence, we also have a question about the relation between identity and biconditionality (pág. 270, nosso grifo)[3]

[3] Chateaubriand, Oswaldo (2001). Logical Forms Part I: Truth and Description. (Coleção CLE, Vol 34).

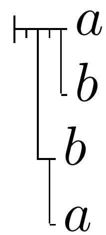
For my part, I consider that the notion of "sameness of conceptual content" Frege intended was simply the notion of replaceability in all contexts of the Begriffsschrift. Frege wrote (Frege, 1879, 21):

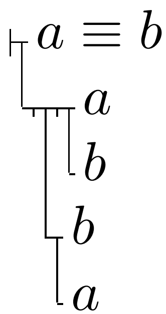
Now let $\vdash A \equiv B$ *mean that the sign A and the sign B have the same conceptual content, so that we can everywhere put B for A and conversely.*

A version of Leibniz's Law is adopted as an axiom to govern the sign,

$$\vdash \begin{array}{l} fa \\ fb \\ a \equiv b \end{array}$$

and this is explained by the meaning assigned to "$a \equiv b$". Now the sign '$\equiv$' was replaced by '$=$' in the Grundgesetze. So it is not insignificant that $\vdash (-a) = (-b)$ is



equivalents to be intersubstituted salva veritate. Accordingly, we should not expect Frege to rail at what would be the analogue for the Begriffs-schrift, viz.,  . *This is not provable in the Begriffsschrift, to be sure.*(pp. 137-8, nosso grifo)[4].

[4] Landini, Gregory (1996). "Decomposition and Analysis in Frege's Grundgesetze". History and Philosophy

Problema

A fórmula 1 parece ser pressuposta na prova do Princípio de Hume em GLA.

of Logic 17, pp. 121-39.

A carta de Frege a Anton Marty (1882)

Em 1882, Frege envia uma curiosa carta a Anton Marty, na qual ele afirmava que estava próximo de completar um livro onde se encontravam provas das leis básicas da aritmética.

> Eu estou quase terminando um livro no qual trato do conceito de número e demonstro que os primeiros princípios da computação que até agora foram considerados axiomas não- derivados podem ser provados a partir de definições por meio de leis lógicas apenas, de forma que eles podem ser considerados como juízos analíticos no sentido de Kant. (pp. 99-100)[5]

[5] FREGE, G. Philosophical and Mathematical Correspondence. Editado por B. McGuinnes e traduzido por

O livro foi escrito na conceitografia ou, pelo menos, as provas das leis básicas da aritmética foram executadas dentro da linguagem formal criada por Frege. A seguinte passagem da carta deixa isto bastante claro:

> Encontro-me em um círculo vicioso: antes que as pessoas prestem atenção a minha con- ceitografia, elas querem ver o que ela pode fazer e, da minha parte, não posso mostrar isto sem pressupor familiaridade com ela. Assim, parece que dificilmente posso contar com qual- quer leitor para o livro que mencionei no início[6]

H. Kaal, Chicago: The University of Chicago Press, 1980.

[6] Ibidem, p. 102.

A carta de Carl Stumpf a Frege (1882)

Podemos concluir que o livro mencionado na carta a Marty **NÃO** é o Grundlagen, pois este último foi escrito na linguagem natural (inclusive os esboços de prova dos "axiomas de Peano"). É interessante mencionar que a publicação dos Grundlagen foi sugerida por Stumpf para que ele servisse como uma espécie de introdução ao livro de 1882

> Em relação ao seu trabalho, o qual espero com extraordinário interesse, por favor não se ofenda se eu lhe perguntar se não seria apropriado explicar sua linha de raciocínio primeiro na lin- guagem ordinária e então — talvez separada- mente em outra ocasião ou no mesmo livro — na conceitografia: acredito que isto contribuiria para uma recepção mais

favorável de ambos relatos.[7]

[7] Ibidem, p. 172.

Questões

- Como e a partir de qual base as leis básicas da aritmética foram provadas em 1882?

A resposta direta é: da forma indicada nos Grundlagen, a saber, a partir da derivação do Princípio de Hume da definição explícita do operador numérico "o número de...". É fato conhecido que a introdução do Princípio de Hume (+ definições "lógicas" de zero, um, sucessor, ancestral forte, ancestral fraco e relação funcional) à lógica segunda ordem possibilita a derivação dos axiomas de Peano.

É importante mencionar que a derivação do Princípio de Hume a partir da definição explícita do operador numérico "o número de..." depende do axioma V. Portanto, a seguinte questão está em ordem

- Uma vez que o axioma V desempenha um papel importante na prova do Princípio de Hume, por que esta lei não é explicitamente citada? Lembrando que os Grundlagen, de acordo com nossa hipótese, é uma espécie de introdução ao livro de 1882.

Esta questão torna-se ainda misteriosa se observarmos que, na primeira parte dos Grundlagen, Frege critica os autores que associaram números a conjuntos ou classes de coisas (ou unidades).

Ao introduzir as extensões de conceitos na seção 68 dos Grundlagen Frege introduz o fantasma do psicologismo e do empirismo no seu livro. Portanto, sendo este livro uma introdução àquele mencionado na carta a Marty, Frege deveria explicar claramente por que definir números como extensões de conceitos não é a mesma coisa que defini-los como classes, aglomerados, etc. Não obstante, o que Frege tem a dizer sobre as extensões é:

> Acontece que estou convencido que ambas objeções pode ser satisfeitas; mas fazer isto levar-nos-ia muito além dos presentes propósitos. Eu assumo que é conhecido o que é uma extensão de conceito. (p. 80)[8]

Além disso, estranhamente, no fim dos Grundlagen Frege sustenta que a introdução das extensões de conceitos não tem qualquer papel decisivo:

> Nesta definição, o sentido da expressão "a ex- tensão de um conceito" é assumido como ser conhecido. Não se espera que esta forma de

[8] FREGE, G. The Foundations of Arithmetic. Austin, Oxford: Basil Blackwell, 1980. Traduzido por J. L.

superar a dificuldade tenha uma aprovação uni- versal e muitos preferirão outros métodos para remover a dúvida em questão. Eu não atribuo absolutamente importância decisiva na intro- dução das extensões de conceitos[9]

[9] Ibidem, p. 117.

Algumas Conclusões

- A introdução das extensões de conceitos nos Grundlagen parece ter sido um ato tardio, quando grande parte do livro já estava escrito.

- Portanto, as leis básicas da aritmética podem ter sido provadas sem auxílio das extensões e do axioma V no livro de 1882.

- Isto explica a falta de clareza de Frege em relação às extensões de conceitos e a ausência de citação da lei básica V em 1884.

- O candidato mais natural para as provas de 1882 é o Princípio de Hume adicionado como uma espécie de definição.

- Em 1884, próximo de terminar o livro, Frege de- scobriu o Problema de Júlio César, que minava o Princípio de Hume como definição. Em tentativa "desesperada", introduz as extensões (e define o operador numérico em termos destas) e pensa na possibilidade de provar o Princípio de Hume.

- Portanto, em 1884, Frege não teria uma prova formal do Princípio de Hume a partir da definição explícita do operador numérico + axioma V (que ainda não tinha sido formulado)

Minha Tese

Quando apresentei estes resultados no Colóquio Frege (Marília, 2008), muitas objeções foram levantadas, principalmente em relação ao caráter altamente especulativo de minhas conclusões. De fato, na época concordei que precisava estabelecer algo mais forte e decisivo que corroborasse estas ideias.

Por sorte, consegui estabelecer tal resultado e ele está diretamente relacionado com a presente palestra. a saber:

SEM A DISTINÇÃO ENTRE SENTIDO E REFERÊNCIA O PRINCÍPIO DE HUME NÃO É DERIVÁVEL NOS GRUNDLAGEN

Princípio de Hume

O Princípio de Hume é estabelecido nas seções 62-3 dos Grundlagen. De acordo com Frege, as seguintes sentenças são gleichbedeutend[10]

1. O número que pertence ao conceito F é igual ao número que pertence ao conceito G

2. Existe uma correspondência um-para-um entre os Fs e os Gs

Na Conceitografia, o Princípio de Hume teria a seguinte forma:

[10] Embora Frege não seja explícito sobre isto em relação ao Princípio de Hume, na sua analogia com as direções ele escreve: "A proposição "a linha a é paralela a linha b" significa o mesmo que (gleichbedeutend) "a direção da linha a é idêntica à direção da linha b"

$$
\vdash \left(\begin{array}{ll} (N_x P(x) \equiv N_x Q(x)) \equiv \mathfrak{R} & Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(P\alpha, Q\beta) \\ & Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha,\beta) \\ & UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha,\beta) \\ & \end{array} \right)
$$

Em notação contemporânea:

$$\forall F \forall G[N_x Fx \equiv N_x Gx. \equiv .F \approx G],$$

onde 'F $\approx$ G' representa a fórmula que afirma que existe uma relação biunívoca entre os Fs e os Gs, ou seja, existe uma relação R que é funcional (muitos-para-um) , que também é um-para-muitos e R correlaciona os Fs e os Gs.

Definição Explícita

Frege exclui o Princípio de Hume como uma possível definição do conceito de número cardinal. A exclusão foi ocasionada pelo Problema de Júlio César[11]

Na seção 68 dos Grundlagen, Frege apresenta sua definição explícita:

> Portanto, minha definição de número cardinal (Anzahl) é como se segue:
>
> O número que pertence ao conceito F é a ex- tensão do conceito "equinumérico ao conceito F" (Frege, 1980, p. 80)

Em símbolos, a definição de Frege seria:

[11] Não tratarei deste problema aqui.

$$N_x Fx =_{def} Ext_X : X \approx F$$ [12]

[12] Há dúvidas se o operador 'o número de...' é definido em termos de extensões de conceitos de segunda ordem. Alguns autores — em particular, Ruffino e Landini — sustentam a tese de que a definição de Frege nos Grundlagen é idêntica à definição de Grundgesetze. Neste caso, o operador número seria definido a partir de extensões de conceitos de primeira ordem. Não obstante, a tese de ambos dependem da redução dos conceitos de ordem superior a conceitos de ordem inferior. Mas isto só será possível depois da distinção entre sentido e referência e a introdução dos valores de verdade como objetos. Landini, em Frege's Notations: What they are and how they mean (2012), menciona este meu resultado e tenta contornar este quebra-cabeça.

A Suposta Prova do Princípio de Hume

Na seção 73 dos Grundlagen, Frege apresenta a suposta prova (esboço de prova) do Princípio de Hume. A prova deveria ser em duas etapas. Primeiro, assumir que

$$N_x Fx = N_x Gx$$

e provar que

$$F \approx G$$

Esta direção não é problemática.

O problema encontra-se na volta, a saber, assumir que

$$F \approx G$$

e provar

$$N_x Fx = N_x Gx$$

No esboço de Frege, ao assumir que

$$F \approx G$$

temos de mostrar duas coisas:

$$H \approx F \rightarrow H \approx G$$

e

$$H \approx G \rightarrow H \approx F$$

Acreditava-se que de $H \approx F \to H \approx G$ e $H \approx G \to H \approx F$, Frege derivaria $H \approx F \leftrightarrow H \approx G$

Axioma V

O problema é que o Axioma V teria de ter a seguinte forma nos Grundlagen

$$Ext_z\Sigma(Z) \equiv Ext_z\Pi(Z). \equiv .\forall F(\Sigma_\alpha F\alpha \equiv \Pi_\alpha F\alpha)$$ [13]

Assim, Frege teria de obter $\forall H(H \approx F \equiv H \approx G)$, a partir de $H \approx F \rightarrow H \approx G$ e $H \approx G \rightarrow H \approx F$ [14].

$\forall H(H \approx F \equiv H \approx G)$ é uma instância do lado direito de

[13] Versão de segunda ordem.

[14] O raciocínio é o mesmo, mutatis mutandis, se o axioma V for de primeira ordem.

$$Ext_z\Sigma(Z) \equiv Ext_z\Pi(Z). \equiv .\forall F(\Sigma_\alpha F\alpha \equiv \Pi_\alpha F\alpha)$$

Portanto, poderíamos derivar

$$Ext_X X \approx F \equiv Ext_X X \approx G$$

Pela definição do operador numérico, a fórmula acima é equivalente a

$$N_x Fx \equiv N_x Gx$$

O Problema

Para obter $\forall H(H \approx F \equiv H \approx G)$ a partir de $H \approx F \to H \approx G$ e $H \approx G \to H \approx F$, Frege precisaria da fórmula

$$(\mathsf{a} \to \mathsf{b}) \to ((\mathsf{b} \to \mathsf{a}) \to (\mathsf{a} \equiv \mathsf{b}))$$

Sentido e Referênica

A distinção entre sentido e referência possibilita a introdução (derivação) de um análogo de

$$(a \rightarrow b) \rightarrow ((b \rightarrow a) \rightarrow (a \equiv b))\ ^{15}$$

em GGA sem que os problemas mencionados antes ocorram. A identidade não ocorrerá em relação aos pensamentos expressos pelas sentenças, mas sim em relação a sua referência (valores de verdade).

No artigo "On Mr. Peano's Conceptual Notation and My Own" (1897), há

[15] O análogo desta fórmula em GGA é o teorema IVa derivado da lei básica IV, que também não é derivável nos sistema lógico de BS e sua introdução é igualmente problemática.

a seguinte passagem na qual Frege justifica a sua distinção entre sentido e referência e a introdução dos valores de verdade como objetos:

> According to this, '2>3', '72 = 0' and '$\bigwedge$' are signs for the same thing, i.e., the meanings of these signs coincide. Now since Mr. Peano also allows the sign of equality to occur be- tween any two true sentences, he apparently subscribes to my above-stated doctrine. If he nevertheless nowhere (so far as I can see) ex- pressly states it, then that is probably because he has been deterred by the strangeness of my tenet. Nay, I am not even sure whether he grants this inference from his premises. The agreement with my doctrine is on this account no less remarkable, since it happens to hold in spite of this repugnance. The natural objection to this would be that true sentences can express different thoughts. According to Mr. Peano the sentences '2.2=4' and '3>2' can be connected by

> the sign of equality: '(2.2=4)=(3>2)'; and yet anyone would agree that they by no means signify the same thing. Without my distinction between sense and meaning this difficulty would be insuperable. Hence this distinction gains in- direct confirmation from what is maintained by my doctrine of the True and the False'' (Frege, 1984, pp. 240-1).

Acredito que a objeção mencionada na pas- sagem, a saber, de que sentenças ver- dadeiras podem expressar pensamentos difer- entes, aplicar-se-ia à teoria lógica de BS, caso Frege tivesse introduzido

$$(a \to b) \to ((b \to a) \to (a \equiv b))$$

como axioma no seu sistema. E, de fato, parece- nos que foi a necessidade de introduzir algo como

$$(a \rightarrow b) \rightarrow ((b \rightarrow a) \rightarrow (a \equiv b))$$

que motivou, em parte, a distinção entre sentido e referência e a introdução dos valores de verdade como objetos.