Jogos Ehrenfeucht–Fraïssé para Classes de Estruturas Específicas

Thiago Alves Rocha

thiagoalves@lia.ufc.br

19 de novembro de 2015

Tópicos

Tópicos

1. Jogos Ehrenfeucht–Fraïssé
2. Uso dos Jogos EF
3. Jogos EF em Classes Específicas
4. Próximos Passos

Introdução

- Podemos definir classes de estruturas a partir de fórmulas.
- No vocabulário dos grafos $\tau_g = \{E\}$, a fórmula $\exists x \forall y(\neg E(x,y) \wedge \neg E(y,x))$ define a classe de grafos com vértices isolados.
    - Ou seja, $G \models \exists x \forall y(\neg E(x,y) \wedge \neg E(y,x))$ iff G tem vértice isolado.
- A fórmula $\forall x \forall y E(x,y)$ define a classe de grafos completos.

Jogo EF

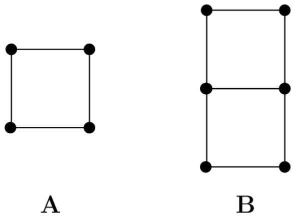
Definição do Jogo

Seja r um inteiro positivo, σ um vocabulário e $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ σ-estruturas. O jogo EF $\mathcal{G}_r(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ com r rodadas em $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ é jogado entre dois jogadores (Spoiler e Duplicator) de acordo com as seguintes regras: O jogo tem r rodadas. Em cada rodada, o Spoiler joga primeiro e escolhe um elemento do domínio de $\mathcal{A}$ ou do domínio de $\mathcal{B}$. O Duplicator responde escolhendo um elemento do domínio da outra estrutura. Seja a_i e b_i os dois elementos escolhidos pelo Spoiler e Duplicator na i-ésima rodada, $1 \leq i \leq r$.

Condição de Vitória

O Duplicator vence um jogo $(a_1, b_1), ..., (a_r, b_r)$ se o mapeamento $a_i \rightarrow b_i$ é um isomorfismo parcial de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$. Caso contrário, o Spoiler vence o jogo.

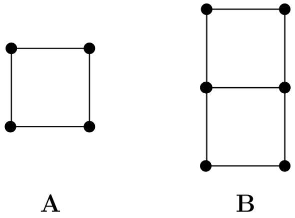
Exemplo



Exemplo de Jogo $\mathcal{G}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B})$

Spoiler escolhe o vértice superior da esquerda de $\mathcal{A}$, Duplicator escolhe o vétice superior da esquerda de $\mathcal{B}$. Spoiler escolhe o vértice inferior esquerdo de $\mathcal{B}$ e o Duplicator escolhe o vértice do inferior direito de $\mathcal{A}$. Duplicator vence.

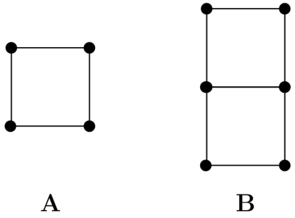
Exemplo



Estratégia Vencedora do Duplicator em $\mathcal{G}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B})$

A estratégia vencedora do Duplicator é escolher o segundo elemento dependendo se os elementos escolhidos pelos Spoiler são ligados.

Exemplo



Estratégia Vencedora do Spoiler em $\mathcal{G}_3(\mathcal{A}, \mathcal{B})$

Estratágia do Spoiler é escolher três elementos em $\mathcal{B}$ sem arestas entre si.

Teorema de Ehrenfeucht–Fraïssé

Definição

Seja r um inteiro positivo, e $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ duas σ-estruturas. Nós escrevemos $\mathcal{A} \equiv_r \mathcal{B}$ para denotar que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ satisfazem as mesmas sentenças de primeira ordem de quantifier rank até r.

Definição

Seja $\mathcal{A}$ uma estrutura e $\bar{v} = v_1 ... v_s$.
$\varphi^0_{\bar{a},\mathcal{A}}(\bar{v}) = \bigwedge\{\varphi(\bar{v}) \mid \mathcal{A} \models \varphi$ e φ é atômica ou negação de atômica$\}$.
$\varphi^m_{\bar{a},\mathcal{A}}(\bar{v}) = \bigwedge_{a\in A} \exists v_{s+1} \varphi^{m-1}_{\bar{a}a,\mathcal{A}}(\bar{v}, v_{s+1}) \wedge \forall v_{s+1} \bigvee_{a\in A} \varphi^{m-1}_{\bar{a}a,\mathcal{A}}(\bar{v}, v_{s+1})$.

Teorema de Ehrenfeucht–Fraïssé

$\mathcal{A} \equiv_r \mathcal{B}$ se e somente se $\mathcal{B} \models \varphi^r_{\mathcal{A}}$.
$\mathcal{A} \equiv_r \mathcal{B}$ se e somente se o Duplicator tem uma estratégia vencedora para o jogo $\mathcal{G}_r(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Tópicos

Expressividade

Teorema

Seja K uma classe de estruturas finitas. K é axiomatizável na Lógica de Primeira Ordem se e somente se existe r tal que para toda estrutura $\mathcal{A}$ e toda estrutura $\mathcal{B}$, se $\mathcal{A} \in K$ e o Duplicator tem estratégia vencedora em $\mathcal{G}_r(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ então $\mathcal{B} \in K$.

EVEN Não é Axiomatizável

Seja $\mathcal{A}_r$ uma τ-estrutura de cardinalidade r em que $R^{\mathcal{A}} = \emptyset$ para todo $R \in \tau$. Para todo r, $\mathcal{A}_r \in EVEN$ se e somente se $\mathcal{A}_{r+1} \notin EVEN$ e o Duplicator tem estratégia vencedora para $\mathcal{G}_r(\mathcal{A}_r, \mathcal{A}_{r+1})$. Como o jogo tem r rodadas e as duas estruturas tem pelo menos r elementos, o Duplicator consegue garantir o isomorfismo parcial até a última rodada.
Pelo Teorema, *EVEN* não é axiomátizável.

- Só precisamos de condições suficientes de vitória para o Duplicator.

Distinguibilidade de Estruturas

Definição

Seja r um natural fixo. Uma fórmula φ tal que $qr(\varphi) = r$ distingue duas estruturas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ se

$$\mathcal{A} \models \varphi$$

e

$$\mathcal{B} \not\models \varphi.$$

- Podemos usar a fórmula $\varphi^r_{\mathcal{A}}$ e verificar se $\mathcal{B} \models \varphi^r_{\mathcal{A}}$.
- Podemos estender a distinguibilidade para conjuntos de estruturas.
- Podemos buscar a fórmula φ de menor quantifier rank que distingue as duas estruturas.
- [Kaiser, 2012] usa para obter fórmulas para jogar jogos de tabuleiro.

Similaridade de Estruturas

Definição

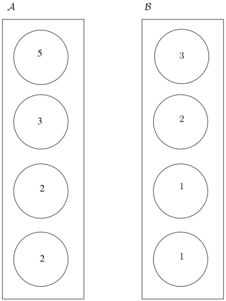
A similaridade entre duas estruturas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ é dada pela menor quantidade de rodadas m tal que o Spoiler tem uma estratégia vencedora para $\mathcal{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

- Podemos nos restringir a alguma classe fixa de estruturas em busca de algoritmos mais eficientes.
- Condições necessárias e suficientes de vitória para o Duplicator permitem que a similaridade possa ser buscada de forma algorítmica.
- [Montanari et al., 2005] usa para verificar similaridade entre strings.

Tópicos

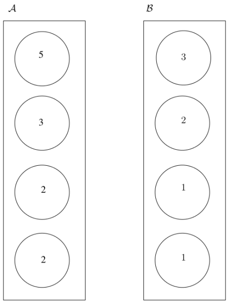
Estruturas de Equivalência

- Uma estrutura de equivalência é uma estrutura $\mathcal{A} = \langle A, E \rangle$ em que E é uma relação de equivalência.



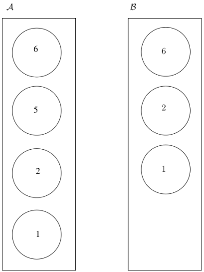
- $\mathcal{A}$ tem duas classes de equivalência de tamanho 2 e $\mathcal{B}$ tem uma classe de equivalência de tamanho 2.
- O Spoiler escolhe um elemento na classe de tamanho 2 em $\mathcal{A}$. O Duplicator deve escolher em $\mathcal{B}$ na classe de mesmo tamanho.

Estruturas de Equivalência



- Spoiler escolhe um elemento em outra classe de tamanho 2 em $\mathcal{A}$.
  - Se o Duplicator escolher em uma classe de tamanho > 2 em $\mathcal{B}$, basta o Spoiler escolher elementos desta classe.
  - Se o Duplicator escolher em uma classe de tamanho < 2 em $\mathcal{B}$ então basta o Spoiler continuar escolhendo elementos na classe de tamanho 2 em $\mathcal{A}$.

Estruturas de Equivalência



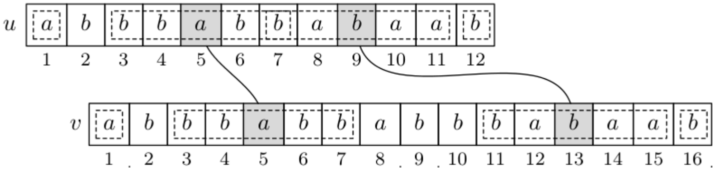
- $\mathcal{A}$ tem duas classes de equivalência de tamanho ≥ 3 e $\mathcal{B}$ tem uma classe de equivalência de tamanho ≥ 3.
- Spoiler escolhe da classe de tamanho ≥ 3 em $\mathcal{A}$. Duplicator deve escolher da classe de tamanho ≥ 3 em $\mathcal{B}$.
- Spoiler escolhe na outra classe de tamanho ≥ 3 em $\mathcal{A}$. Duplicator tem que escolher da classe de tamanho < 3 em $\mathcal{B}$.
- Basta o Spoiler escolher elementos na mesma classe de tamanho ≥ 3 em $\mathcal{A}$.

Teorema [Khoussainov and Liu, 2009]

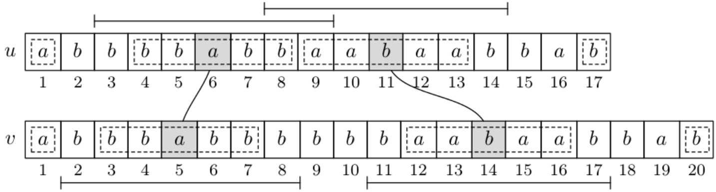
Duplicator tem uma estratégia vencedora para $\mathcal{G}_r(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ se e somente se existe $t < n$ tal que a quantidade de classes de equivalência de tamanho t em $\mathcal{A}$ é diferente da de $\mathcal{B}$ e $r > t + min\{q(\mathcal{A}, t), q(\mathcal{B}, t)\}$ ou existe $t \leq r$ tal que a quantidade de classes de equivalência de tamanho $\geq t$ é diferente da de $\mathcal{B}$ e $n \geq t + min\{q_{\geq}(\mathcal{A}, t), q_{\geq}(\mathcal{B}, t)\}$.

Estruturas de String [Montanari et al., 2005]

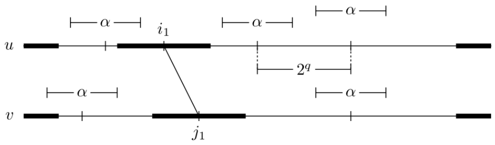
- Vamos utilizar estruturas sucessor rotuladas $\mathcal{A} = (A, S, \{P_a\}_{a \in \Sigma})$.



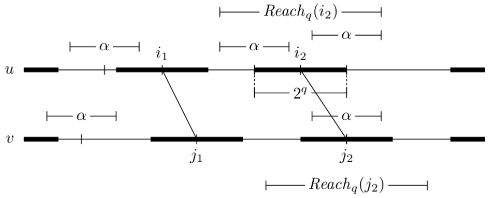
- Spoiler tem estratégia vencedora para o jogo de duas rodadas pois $d_{2^2}(5, 9) = 4 \leq 2^2$ e $d_{2^2}(5, 13) = 8 > 2^2$.
    - Spoiler escolhe 7 e Duplicator não consegue fazer 3 índices seguidos.



- Spoiler tem estratégia vencedora para o jogo de duas rodadas nas strings abaixo.
- $u[6-(2^2-1):6+(2^2-1)] \neq v[5-(2^2-1):5+(2^2-1)]$.
- Spoiler escolhe 8 em u e Duplicator deve escolher 7 em v.
- Spoiler escolhe 9 em u.



- O grau de espalhamento de α em u e em v é 2.
- A multiplicidade de α em u é 3 e em v é 2.



- $u[i_2 - (2^q - 1) : i_2 + (2^q - 1)] \neq v[j_2 - (2^q - 1) : j_2 + (2^q - 1)]$ por conta da quantidade de α's em cada uma.

Tópicos

Próximos Passos

- Obter condições necessárias e suficientes de vitória para Duplicator na classe das strings no jogo EF da lógica FO^k.
- Obter condições necessárias e suficientes de vitória para Duplicator na classe das strings no jogo EF da lógica MSO.
  - Na classe das estruturas de string, MSO captura as Linguagens Regulares [Teorema de Büchi-Elgot-Trakhtenbrot].
  - Definir algoritmo que retorna fórmulas em MSO para distinguir conjuntos de strings.
  - Comparar com alternativas que retornam um autômato finito ou expressão regular.

Referências

Kaiser, L. (2012).
Learning games from videos guided by descriptive complexity.
In *Proceedings of the Twenty-Sixth AAAI Conference on Artificial Intelligence, July 22-26, 2012, Toronto, Ontario, Canada.*

Khoussainov, B. and Liu, J. (2009).
On complexity of ehrenfeucht–fraïssé games.
Annals of Pure and Applied Logic, 161(3):404 – 415.

Montanari, A., Policriti, A., and Vitacolonna, N. (2005).
An algorithmic account of ehrenfeucht games on labeled successor structures.
In *Logic for Programming, Artificial Intelligence, and Reasoning, 12th International Conference, LPAR 2005, Montego Bay, Jamaica, December 2-6, 2005, Proceedings*, pages 139–153.