FORMULAÇÃO DE UM PROBLEMA DUAL

Considere o seguinte problema de dieta. Uma família deseja minimizar seu custo com alimentação, escolhendo, dentre seis tipos de alimentos primários, uma certa quantidade de cada um, de modo a atender requisitos mínimos de vitamina A e C. A Tabela 4.1 mostra o custo de cada alimento e as respectivas quantidades de vitaminas que fornecem.

Tabela 4.1

Vitamina	Unidades de vitaminas / Kg de alimento						Mínimo requerido de vitamina (unid/dia)
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
A	1	0	2	2	1	2	9
C	0	1	3	1	3	2	19
Custo do alimento ($/kg)	35	30	60	50	27	22	

Seja x_j a quantidade consumida, em quilogramas, do j-ésimo alimento. Assim, o PPL correspondente é dado por:

$$\text{Min. } Q(x) = 35x_1 + 30x_2 + 60x_3 + 50x_4 + 27x_5 + 22x_6 \quad \text{s.a.}$$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 &\geq 9; \\ x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 &\geq 19; \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0. \end{aligned} \tag{0.1}$$

Neste contexto, um fabricante deseja abrir um novo negócio, produzindo pílulas que substituam os alimentos como fonte de vitaminas, e vendê-las à família. Para convencê-la a trocar os alimentos pelas pílulas, o fabricante precisa mostrar que todos os nutrientes diários exigidos serão encontrados nelas. Por outro lado, a família não comprará as pílulas a menos que o preço do fabricante seja competitivo em relação aos alimentos. Isto restringe severamente os preços das pílulas.

Sejam u_1 e u_2 os preços das pílulas de vitamina A e C, respectivamente. Considere, por exemplo, o alimento do tipo 3. Um quilograma deste contém duas unidades de vitamina A e três de vitamina C. Para o fabricante, levando em consideração os preços de cada vitamina, reproduzir este alimento custará $2u_1 + 3u_2$. Como um quilograma deste alimento custa $ 60, a família somente optará pelas pílulas se $2u_1 + 3u_2 \leq 60$. Este raciocínio vale para todos os tipos de alimento.

Se a família decidir utilizar as pílulas, terá que consumir tantas quantas forem necessárias para suprir o mínimo de vitaminas requerido diariamente. Assim o fabricante saberá que seu lucro será dado por $Q(u) = 9u_1 + 19u_2$, valor este que espera-se maximizado. Assim, a ótica do fabricante está dada por:

$$
\begin{aligned}
\text{Max. } & Q(u) = 9u_1 + 19u_2 \quad \text{s.a.} \\
& u_1 \leq 35; \\
& u_2 \leq 30; \\
& 2u_1 + 3u_2 \leq 60; \\
& 2u_1 + u_2 \leq 50; \\
& u_1 + 3u_2 \leq 27; \\
& 2u_1 + 2u_2 \leq 22; \\
& u_1, u_2 \geq 0.
\end{aligned}
\tag{0.2}
$$

Este problema é chamado de dual.