Lista de Exercícios - Programação Inteira

Prof. Manoel Campêlo

Exercício 1 *uma companhia deseja estabelecer seu programa de produção para as próximas nove semanas. Cada uma das n tarefas dura, em geral, várias semanas e, uma vez iniciada, não pode sofrer interrupção. Durante cada semana um certo número de operários fica dedicado a determinada tarefa. Assim, a tarefa i consome p_i semanas e demanda l_{iu} operários na semana $u = 1, 2, \ldots, p_i$. O número total de operários disponíveis na semana t é L_t. Formule um modelo de PI para encontrar um esclonamento viável, garantindo que:*

- *o número máximo de operários em cada semana seja mínimo,*
- *a terafa 1 inicie pelo menos duas semanas antes da tarefa 3,*
- *a tarefa 4 comece no máximo uma semana após a tarefa 5, e*
- *as tarefas 1 e 2 não sejam executadas simultaneamente.*

Exercício 2 *Formule o problema do caixeiro viajante (orientado) usando variáveis binárias x_{ijk}, tal que $x_{ijk} = 1$ se, e somente se, (i, j) é o k-ésimo arco do ciclo hamiltoniano.*

Exercício 3 *Considere o seguinte problema quadrático da mochila*

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} c_{ij} x_i x_j \;\; s.a. \;\; \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geq b, x \in \mathcal{B}^n.$$

Usando variáveis y_{ij} para representar cada termo quadrático $x_i x_j$, reformule o modelo como um problema de programação linear inteira.

Exercício 4 *Seja $H \in \mathcal{R}_+^{m\times n}$ e $c \in \mathcal{R}_+^n$. Seja $\mathcal{F}$ a família de todos os subconjuntos não vazios de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Para $F \in \mathcal{F}$, defina*

$$z(F) = \sum_{i=1}^{m} \max_{j\in F} h_{ij} - \sum_{j\in F} c_j.$$

Mostre que o problema de otiizac cão combinatória $\max\ z(F)$ *s.a.* $F \in \mathcal{F}$*, pode ser reformulado através de um dos seguintes modelos de programação linear inteira.*

1.

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n h_{ij} y_{ij} - \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ s.a: & \sum_{j=1}^n y_{ij} = 1 \;\; i = 1, 2, \ldots, m \\ & y_{ij} \leq x_j \;\; i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, n \\ & y \in \mathcal{B}^{m\times n}, \;\; x \in \mathcal{B}^n. \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^m u_i - \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ s.a: & u_i \leq h_{ik} + \sum_{j=1}^n (h_{ij} - h_{ik})^+ x_j \;\; i = 1, 2, \ldots, m, \; k = 0, 1, \ldots, m \\ & \sum_{j=1}^n x_j \geq 1 \\ & u \in \mathcal{R}_+^m, \;\; x \in \mathcal{B}^n, \end{array}$$

onde a^+ denota $\max\{0, a\}$ e $h_{i0} = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, m$.

Exercício 5 *Para* $i = 1, 2, \ldots, q$, *seja* $P_i = \{x \in \mathcal{R}^n : A^i x \leq b^i, 0 \leq x \leq d\}$, *onde* $A^i \in \mathcal{R}^{m_i \times n}$, $b^i \in R^{m_i}$ *e* $d \in \mathcal{R}^n$. *Generalizando o que foi visto em sala de aula, reformule o problema:*

$$(P) \quad \min c^T x \;\; s.a. \;\; x \in \mathcal{P} = \bigcup_{i=1,2,\ldots,q} P_i$$

através de um modelo de programação linear inteira que usa uma variável binária y_i *para representar se* $x \in P_i$ *ou não.*

Exercício 6 *Considere o problema* (P) *do exercício anterior e o seguinte PPLI*

$$\begin{array}{lll} (Q) & min & c^T x \\ & s.a. & A^i z^i \leq b^i y_i, \;\; 0 \leq z^i \leq d y_i, \;\; \forall i = 1, 2, \ldots, q \\ & & \sum_{i=1}^{q} z^i = x, \;\; \sum_{i=1}^{q} y_i = 1 \\ & & y \in \mathcal{B}, x \in \mathcal{R}^n, z^i \in \mathcal{R}^n, \;\; \forall i = 1, 2, \ldots, q \end{array}$$

Sejam S_0 *e* S_1 *os conjuntos viáveis de* (Q) *e de sua relaxação linear, respectivamente. Para* $k = 0, 1$ *defina* $T_k = \{x : (x, z^i, y) \in S_k$ *para algum* $(z^i, y)\}$, *ou seja, a projeção de* S_k *sobre* x.

1. *Mostre que* (P) *é equivalente a* (Q), *ou seja,* $\mathcal{P} = T_0$.
2. *Mostre que* $conv(\mathcal{P}) = T_1$.
3. *Qual a melhor formulação para* (P): *o modelo pedido no exercício anterior ou* (Q) *?*

Exercício 7 *Dado* $S = \left\{x \in B^{|N_1|+|N_2|} : \sum_{j \in N_1} a_j x_j - \sum_{j \in N_2} a_j x_j \leq b\right\}$, *onde* $a_j > 0$ *para* $j \in N_1 \cup N_2$, *encontre condições necessárias e suficientes para que:*

1. $S = \emptyset$,
2. $S = B^{|N_1|+|N_2|}$,
3. $x_j = 0, \; \forall x \in S$,
4. $x_j = 1, \; \forall s \in S$,
5. $x_i + x_j \leq 1, \; \forall s \in S$.
6. $x_i \leq x_j, \; \forall s \in S$,
7. $x_i + x_j \geq 1, \; \forall s \in S$.

Exercício 8 *Considere o problema*

$$(P) \quad \min c^T x \;\; s.a. \;\; Ax = b, x \in \mathcal{B}^n,$$

e denote por $(\bar{P})$ *sua relaxação linear. Seja* x^* *uma solução básica ótima para* $(\bar{P})$ *e considere o quadro simplex correspondente. Para* k *tal que* $0 < x_k^* < 1$, *defina*

$$\Delta_k^0 = x_k^* \min_j \left\{ \frac{c_j - z_j}{y_{ij}} : y_{ij} > 0 \right\}$$

e

$$\Delta_k^1 = (1 - x_k^*) \min_j \left\{ \frac{c_j - z_j}{-y_{ij}} : y_{ij} < 0 \right\},$$

onde i *corresponde a linha do quadro relativa a* x_k. *Mostre que:*

1. $c^T x^* + \Delta_k^0$ e $c^T x^* + \Delta_k^1$ *são limites inferiores para o problema* (P) *quando* x_k *está fixo em 0 ou 1, respectivamente.*
2. *Se* $\Delta_k = \min\{\Delta_k^0, \Delta_k^1\}$ *e* $\Delta = \max_k\{\Delta_k : 0 < x_k^* < 1\}$, *então* $c^T x^* + \Delta$ *é limite inferior para* (P).

Exercício 9 *Considere o problema*

$$(P) \quad \min c^T x \ \ s.a. \ Ax = b, x \in Z^n,$$

e denote por $(\bar{P})$ *sua relaxação linear. Seja* x^* *uma solução básica ótima para* $(\bar{P})$ *e considere o quadro simplex correspondente.*

1. *Para* k *tal que* $x_k^* = \lfloor x_k^* \rfloor + f_k$, *com* $0 < f_k < 1$, *defina* Δ_k^- *e* Δ_k^+ *tais que* $c^T x^* + \Delta_k^-$ *e* $c^T x^* + \Delta_k^+$ *sejam limites inferiores para o problema* (P) *acrescido de* $x_k \leq \lfloor x_k^* \rfloor$ *ou* $x_k \geq \lfloor x_k^* \rfloor + 1$, *respectivamente.*
2. *Defina* Δ *tal que* $c^T x^* + \Delta$ *seja limite inferior para* (P).
3. *(para depois ....) Considere que o corte de Gomory definido por* x_k *seja acrescido a* (P). *Encontre* Δ_k^G *tal que* $c^T x^* + \Delta_k^G$ *seja limite inferior para o novo problema. Qual a relação entre* Δ_k^G *e* $\Delta_k = \min\{\Delta_k^-, \Delta_k^+\}$ *?*

Exercício 10 *Seja* $X = X_1 \cup X_2$, *com* $X_i \in \mathcal{R}_+^n$, *para* $i = 1, 2$. *Mostre que se* $(\pi^i)^t x \leq \pi_0^i$ *é válida para* X_i, *para* $i = 1, 2$, *então* $\pi^t x \leq \pi_0$ *é válida para* X, *onde* $\pi \leq \pi^i$ *e* $\pi_0 \geq \pi_0^i$, *para* $i = 1, 2$.

Exercício 11 *Seja* $G = (V, E)$ *um grafo. Um conjunto estível de* G *é um subconjunto de vértices* $U \subseteq V$ *tal que não existe aresta entre quaisquer dois vértices em* U. *uma clique é um subconjunto de vértices* $U \subseteq V$ *tal que sempre existe aresta entre quaisquer dois vértices em* U. *Mostre que o problema de encontrar um conjunto estível de cardinalidade máxima é o dual do problema de encontrar uma cobertura mínima de arestas por cliques.*

Exercício 12 *Mostre que as seguintes assertivas são equivalentes:*

1. *A é TU.*
2. *A matriz obtida excluindo uma linha (ou coluna) de A é TU.*
3. *A matriz obtida multiplicando uma linha (ou coluna) de A por* -1 *é TU.*
4. *A matriz obtida duplicando colunas (ou linhas) de A é TU.*
5. *A matriz obtida por um pivoteamento (mudança de quadro) simplex é TU.*