Lista de Exercícios - Programação Inteira

Prof. Manoel Campêlo

Exercício 1 *Considere o problema* (P) *definido a seguir:*

$$\begin{array}{lllllll} \min & c_1^T x_1 & + & c_2^T x_2 & \cdots & c_n^T x_n & & \\ s.a. & A_1 x_1 & + & A_2 x_2 & \cdots & A_n x_n & = & a \\ & B_1 x_1 & & & & & = & b_1 \\ & & & B_2 x_2 & & & = & b_2 \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & B_n x_n & = & b_n \\ & x_i \in \mathcal{Z}^{q_i} & & i = 1, 2, \ldots, n & & & & \end{array}$$

onde $a \in \mathcal{R}^m$, $b_i \in \mathcal{R}^{p_i}$, $c_i \in \mathcal{R}^{q_i}$, $A_i \in \mathcal{R}^{m \times q_i}$ *e* $B_i \in \mathcal{R}^{p_i \times q_i}$, *para* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Seja $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. *Defina* $H_i = \{x_i \in \mathcal{Z}^{q_i} : B_i x_i = b_i\}$ *e assuma que* H_i *é não vazio e limitado. Seja* Q_i *a matriz cujas colunas são os elementos de* H_i. *Note que*

$$x_i \in H_i \Longleftrightarrow x_i = Q_i \lambda_i,\ e_i^T \lambda_i = 1,\ \lambda_i \in \{0,1\}^{|H_i|},$$

onde $e_i^T = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathcal{R}^{|H_i|}$. *Faça:*

1. *Usando as variáveis* λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, *encontre o problema mestre de Dantzig-Wolfe equivalente a* (P).
2. *Determine o(s) subproblema(s) escravos(s) que geram as colunas.*
3. *Espeficique a forma da coluna gerada.*

Exercício 2 *Considere o seguinte problema de programação inteira 0-1:*

$$(P) \quad \min \quad c^T x \quad s.a. \quad A^1 x = b^1, A^2 x = b^2, x \in \mathcal{B}^n,$$

onde $A^i \in \mathcal{Z}^{m_i \times n}$ *e* $b^i \in \mathcal{Z}^{m_i}$, *para* $i = 1, 2$. *Assuma* $X_2 = \{x \in \mathcal{B}_+^n : A^2 x = b^2\} = \{x^1, x^2, \ldots, x^q\}$. *Usando a equivalência*

$$x \in X_2 \Longleftrightarrow x = \sum_{k=1}^{q} \lambda_k x^k,\ \sum_{k=1}^{q} \lambda_k = 1,\ \lambda \in \mathcal{B}^q, \tag{1}$$

chega-se aos seguintes problemas mestre e escravo:

$$\begin{array}{lll} (M) & \min & \sum_{k=1}^q (c^T x^k) \lambda_k \\ & s.a. & \sum_{k=1}^q (A^1 x^k) \lambda_k = b^1 \\ & & \sum_{k=1}^q \lambda_k = 1 \\ & & \lambda \in B^p \end{array} \qquad \begin{array}{lll} (E) & \delta = \min & c^T x - \bar{u}^T A^1 x - \bar{u}_0 \\ & s.a. & x \in X_2 \end{array}$$

onde $\bar{u} \in R^{m_1}$ *e* $\bar{u}_o \in R$ *são os valores ótimos duais para a relaxação linear* $(\bar{M})$ *de* (M), *restrita a algumas colunas. Sejam* $\bar{\lambda}$ *uma solução ótima de* $(\bar{M})$ *e* $\bar{x} = \sum_{k=1}^q \bar{\lambda}_k x^k$ *a solução correspondente de* (P). *Mostre que:*

1. $\bar{\lambda} \in \mathcal{B}^q \Longleftrightarrow \bar{x} \in \mathcal{B}^n$. *(Sug.: use o fato de que todos os x^k são diferentes.)*

2. Dados $j = 1, 2, \ldots, n$ *e* $\delta \in \{0, 1\}$, $\bar{x}_j = \delta \Longleftrightarrow \bar{x}_j^k = \delta$ *para todo* $k = 1, 2, \ldots, q$ *tal que* $\bar{\lambda}_k > 0$.

3. (Não é preciso responder este item) Como ficariam os problemas mestre e escravo após a inclusão de uma restrição do tipo $x_j = \delta \in \{0, 1\}$ *?*

Exercício 3 *Considere o seguinte problema de programação inteira:*

$$(P) \quad \min \ c^T x \quad s.a. \quad A^1 x = b^1, A^2 x = b^2, x \in \mathcal{Z}^n,$$

onde $A^i \in \mathcal{Z}^{m_i \times n}$ *e* $b^i \in \mathcal{Z}^{m_i}$, *para* $i = 1, 2$. *Assuma que* $X_2 = \{x \in \mathcal{Z}_+^n : A^2 x = b^2\}$ *é não vazio e limitado. Sejam:*

z_{PC} *valor ótimo da relaxação linear de* (P) *acrescida dos planos de corte obtidos por um algoritmo de separação exato para* $conv(X_2)$.

z_{GC} *valor ótimo da relaxação linear do problema mestre obtido com a geração de colunas relativas a* X_2.

z_{RL} *valor ótimo do dual lagrangeano quando as restrições* $A^1 x = b^1$ *são dualizadas.*

Mostre que $z_{PC} = z_{GC} = z_{RL}$.