Matemática Básica
Lista de Exercícios 03

Predicados e Quantificadores

1. Considere $P(x)$ como a proposição "$x \leq 4$". Quais são os valores-verdade das proposições abaixo?
   (a) $P(0)$ (b) $P(4)$ (c) $P(6)$

2. Considere $Q(x,y)$ como a proposição "x é a capital de y". Quais os valores-verdade das proposições a seguir?
   (a) Q(Belo Horizonte, Minas Gerais)
   (b) Q(Espírito Santo, Vitória)
   (c) Q(Buenos Aires, Uruguai)
   (d) Q(Nova York, Estados Unidos)

3. Considere $P(x)$ como a proposição "x passa mais do que cinco horas em aula todos os dias", em que o domínio de x sao todos os estudantes. Expresse cada uma dessas quantificações em português.
   (a) $\exists x\ P(x)$ (b) $\forall x\ P(x)$ (c) $\exists x\ \neg P(x)$ (d) $\forall x\ \neg P(x)$

4. Trascreva essas proposições para o português, em que $C(x)$ é "x é um comediante" e $F(x)$ é "x divertido" e o domínio são todas as pessoas.
   (a) $\forall x(C(x) \rightarrow F(x))$
   (b) $\forall x(C(x) \wedge F(x))$
   (c) $\exists x(C(x) \rightarrow F(x))$
   (d) $\exists x(C(x) \wedge F(x))$

5. Considere $P(x)$ como a proposição "x fala russo" e considere $Q(x)$ como a proposição "x sabe a linguagem computacional C++". Expresse cada uma dessas sentenças em termos de $P(x)$, $Q(x)$, quantificadores e conectivos lógicos. O domínio para quantificadores são todos os estudantes de sua escola.
   (a) Há um estudante em sua escola que fala russo e sabe C++.
   (b) Há um estudante em sua escola que fala russo, mas não sabe C++.
   (c) Todo estudante em sua escola ou fala russo ou sabe C++.
   (d) Nenhum estudante em sua escola fala russo ou sabe C++.

6. Considere $P(x)$ como a proposição "$x = x^2$". Se o domínio forem os números inteiros, quais seram os valores-verdade?
   (a) $P(0)$
   (b) $P(1)$
   (c) $P(2)$
   (d) $P(-1)$
   (e) $\exists x P(x)$
   (f) $\forall x P(x)$

7. Determine o valor-verdade de cada uma destas proposições, se o domínio forem todos os números inteiros.
   (a) $\forall n(n+1 > n)$
   (b) $\exists n(2n = 3n)$
   (c) $\exists n(n = -n)$
   (d) $\forall n(n^2 \geq n)$

8. Determine o valor-verdade de cada uma destas proposições, se o domínio para todas as variáveis forem todos os números inteiros.
   (a) $\forall n(n^2 \geq 0)$
   (b) $\exists n(n^2 = 2)$
   (c) $\forall n(n^2 \geq n)$
   (d) $\exists n(n^2 < 0)$

9. Suponha que o dominio da função proposicional $P(x)$ sejam os números inteiros $0, 1, 2, 3$ e 4. Desenvolva estas proposições usando disjunções, conjunções e negações.
   (a) $\exists x P(x)$
   (b) $\forall x P(x)$
   (c) $\exists x \neg P(x)$
   (d) $\forall x \neg P(x)$
   (e) $\neg \exists x P(x)$
   (f) $\neg \forall x P(x)$

10. Suponha que o dominio da função proposicional $P(x)$ sejam os números inteiros $1, 2, 3, 4$ e 5. Expresse estas propsições sem usar quantificadores, mas, sim, apenas negações, disjunções e conjunções.
    (a) $\exists P(x)$
    (b) $\forall x P(x)$
    (c) $\neg \exists x P(x)$
    (d) $\neg \forall x P(x)$
    (e) $\forall x((x \neq 3) \rightarrow P(x)) \vee \exists x \neg P(x)$

11. Para cada uma destas proposições, encontre um domínio para que a proposição seja verdadeira e um domínio para que a proposição seja falsa.
    (a) Todos estão estudando matemática discreta.
    (b) Todos têm mais de 21 anos.
    (c) Duas pessoas têm a mesma mãe.
    (d) Nem todo par de pessoas diferentes tem a mesma avó.

12. Transcreva de duas forma cada uma das proposições em expressões lógicas usando predicados, quantificadores e operadores lógicos. Primeiro, o domínio são os estudantes em sua sala, e, segundo, considere-o como todas as pessoas.
    (a) Alguém em sala fala hindu.
    (b) Todos em sala são amigáveis.
    (c) Há uma pessoa em sua sala que não nasceu no Brasil.
    (d) Um estudante de sua sala participou de um filme.
    (e) Nenhum estudante de sua sala teve um curso de programação lógica.

13. Transcreva cada uma das proposições em expressões lógicas usando predicados, quantificadores e operadores lógicos.
    (a) Ninguém é perfeito.
    (b) Nem todos são perfeitos.
    (c) Todos os seus amigos são perfeitos.
    (d) Pelo menos um de seus amigos é perfeito.
    (e) Todos são seus amigos e são perfeitos.
    (f) Nem todos são seus amigos ou alguém não é perfeito.

14. Transcreva cada uma das proposições abaixo em expressões lógicas de três maneiras diferentes, variando o domínio e usando predicados com uma ou duas variáveis.
    (a) Um estudante em sua escola morou no Vietnã.
    (b) Há um estudante em sua escola que não fala hindu.
    (c) Um estudante em sua escola conhece Java, Prolog e C++.
    (d) Todos em sua sala gostam de comida tailandesa.
    (e) Alguém em sua sala não joga hóquei.

15. Expresse cada uma das proposições abaixo usando operadores lógicos, predicados e quantificadores.
    (a) Algumas proposições são tautologia.
    (b) A negação de uma contradição é uma tautologia.
    (c) A disjunção de duas contingências pode ser uma tautologia. (Uma contigência não é tautologia nem contradição.)
    (d) A conjunção de duas tautologias é uma tautologia.

16. Suponha que o domínio de $Q(x, y, z)$ são todas as tuplas onde x pode assumir os valores 0, 1 ou 2; y pode assumir os valores 0 ou 1; e z pode assumir os valores 0 ou 1. Desenvolva as proposições abaixo usando disjunções e conjunções.
    (a) $\forall y Q(0, y, 0)$
    (b) $\exists x Q(x, 1, 1)$
    (c) $\exists z \neg Q(0, 0, z)$
    (d) $\exists x \neg Q(x, 0, 1)$

17. Expresse cada uma das proposições abaixo usando quantificadores. Depois forme a negação de cada proposição, de modo que nenhuma negação fique do lado esquerdo de um quantificador. Em seguida, expresse a negação em português. (Não use simplesmente as palavras "Não é o caso de".)
    (a) Alguns cães velhos aprendem truques novos.
    (b) Nenhum coelho sabe cálculo.
    (c) Todo pássaro pode voar.
    (d) Não há cães que falem.
    (e) Não há nesta sala alguém que fale francês e russo.

18. Encontre um contraexemplo, se possível, para estas proposições quantificadas universalmente, em que o domínio para todas as variáveis são todos os números inteiros.
    (a) $\forall x(x^2 \geq x)$
    (b) $\forall x(x > 0 \vee x < 0)$
    (c) $\forall x(x = 1)$

19. Expresse cada uma das proposições abaixo usando predicados e quantificadores.
    (a) Um passageiro em uma companhia aérea é qualificado como um viajante de elite se voar mais de 25.000 milhas em um ano ou pegar mais de 25 vôos durante o ano.
    (b) Homens se classificam para a maratona se seu melhor tempo for menor que 3h, e mulheres se classificam se seu melhor tempo for menor que 3,5h.
    (c) Para receber o título de mestre, é necessário que o aluno tenha conceito pelo menos B em todas as disciplinas. Além disso, ele deve frequentar no mínimo 60h/aula, ou frequentar no mínimo 45h/aula e escreva uma tese.
    (d) Há um estudante que cursou mais de 21 créditos em um semestre e recebeu conceito A em todas as disciplinas.

20. Transcreva as especificações abaixo para o português, em que $Q(p)$ é "a impressora p está quebrada", $O(p)$ é "a impressora p esta ocupada", $P(j)$ é "a impressão do trabalho j foi perdida", e $A(j)$ é "a impressão do trabalho j foi adicionada à fila".
    (a) $\exists p(Q(p) \wedge O(p)) \rightarrow \exists j P(j)$
    (b) $\forall p O(p) \rightarrow \exists j A(j)$
    (c) $\exists j(A(j) \wedge P(j)) \rightarrow \exists p Q(p)$
    (d) $(\forall p O(p) \wedge \forall j A(j)) \rightarrow \exists j P(j)$

21. Expresse cada um dos sistemas de especificação abaixo usando predicados, quantificadores e conectivos lógicos.
    (a) Pelo menos uma mensagem, em um conjunto não vazio de mensagens, pode ser salva se existe um disco com mais de 10 KB de espaço livre.
    (b) Sempre que um alerta estiver ativado, todas as mensagens na fila serão transmitidas.

(c) A tela de diagnóstico rastreia o *status* de todos os sistemas, exceto do console principal.

(d) Cada participante da videoconferência que não for colocado em uma lista especial, receberá uma conta a pagar.

22. Determine se $\forall x(P(x) \to Q(x))$ e $\forall xP(x) \to \forall xQ(x)$ são logicamente equivalentes. Justifique sua resposta.
23. Mostre que $\exists x(P(x) \vee Q(x))$ e $\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$ são logicamente equivalentes.
24. Mostre que $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$ e $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ não são logicamente equivalentes.

Respostas:

1. (a) V (b) V (c) F
2. (a) V (b) F (c) F (d) F
3. (a) Existe estudante que passa mais de 5 horas em aula todos os dias da semana.
   (b) Todo estudante passa mais de 5 horas em aula todos os dias da semana.
   (c) Existe estudante que não passa mais de 5 horas em aula todos os dias da semana.
   (d) Nenhum estudante passa mais de 5 horas em aula todos os dias da semana.
4. (a) Todo comediante é divertido.
   (b) Todo mundo é comediante e divertido.
   (c) Existe pelo menos uma pessoa tal que se ela for comediante, então ela será divertida.
   Alternativa: Existe pessoa que não é comediante ou é divertida.
   (d) Alguns comediantes são divertidos.
5. (a) $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$
   (b) $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$
   (c) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$
   (d) $\forall x(\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \equiv \forall x\neg(P(x) \vee Q(x)) \equiv \neg\exists x(P(x) \vee Q(x))$
6. (a) V (b) V (c) F (d) F (e) V (f) F
7. (a) V (b) V (c) V (d) V
8. (a) V (b) F (c) V (d) F
9. (a) $P(0) \vee P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$
   (b) $P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$
   (c) $\neg P(0) \vee \neg P(1) \vee \neg P(2) \vee \neg P(3) \vee \neg P(4)$
   (d) $\neg P(0) \wedge \neg P(1) \wedge \neg P(2) \wedge \neg P(3) \wedge \neg P(4)$
   (e) $\neg(P(0) \vee P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4))$
   (f) $\neg(P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4))$
10. (a) $P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4) \vee P(5)$
    (b) $P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4) \wedge P(5)$
    (c) $\neg(P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4) \vee P(5))$
    (d) $\neg(P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4) \wedge P(5))$
    (e) $(P(1) \wedge P(2) \wedge P(4) \wedge P(5)) \vee (\neg P(1) \vee \neg P(2) \vee \neg P(3) \vee \neg P(4) \vee \neg P(5))$
11. São possíveis muitas respostas.
    (a) Todos os estudantes no curso de matemática discreta; todos os estudantes no mundo.
    (b) Todos do Brasil; todos os jogadores de futebol.
    (c) Caetano Veloso e Maria Betânia; todos os políticos do Brasil.
    (d) Dilma e Lula; todos os políticos do Brasil.
12. Seja $S(x)$ a função proposicional "x estuda na minha sala".
    (a) $\exists xH(x)$ e $\exists x(S(x) \wedge H(x))$, onde $H(x)$ é "x sabe falar hindu".
    (b) $\forall xA(x)$ e $\forall x(S(x) \to A(x))$, onde $A(x)$ é "x é amigável".
    (c) $\exists x\neg B(x)$ e $\exists x(S(x) \wedge \neg B(x))$, onde $B(x)$ é "x nasceu no Brasil".
    (d) $\exists xF(x)$ e $\exists x(S(x) \wedge F(x))$, onde $F(x)$ é "x participou de um filme".
    (e) $\forall x\neg L(x)$ e $\forall x(S(x) \to \neg L(x))$, onde $L(x)$ é "x teve um curso de programação lógica".
13. Seja $P(x)$ "x é perfeito"; seja $A(x)$ "x é seu amigo"; e considere como domínio todas as pessoas.
    (a) $\forall x\neg P(x)$
    (b) $\neg\forall xP(x)$
    (c) $\forall x(A(x) \to P(x))$
    (d) $\exists x(A(x) \wedge P(x))$
    (e) $\forall x(A(x) \wedge P(x))$ ou $(\forall xA(x)) \wedge (\forall xP(x))$
    (f) $(\neg\forall xA(x)) \vee (\exists x\neg P(x))$
14. Seja $Y(x)$ a função proposicional que x está em sua escola ou classe, conforme apropriado.
    (a) Se fizermos $V(x)$ ser "x morou no Vietnã", então temos $\exists xV(x)$ se o domínio for apenas seus colegas de escola, ou $\exists x(Y(x) \wedge V(x))$ se o domínio for todas as pessoas. Se $D(x,y)$ significar que a pessoa x morou no país y, então podemos reescrever a última como $\exists x(Y(X) \wedge D(x, \text{Vietnã}))$.
    (b) Se $H(x)$ for "x fala hindu", então temos $\exists x\neg H(x)$ se o domínio for apenas seus colegas de escola, ou $\exists x(Y(x) \wedge \neg H(x))$ se o domínio for todas as pessoas. Se $S(x,y)$ significar que a pessoa x fala a língua y, então podemos reescrever esta última como $\exists x(Y(x) \wedge \neg S(x, \text{hindu}))$.
    (c) Se $J(x)$, $P(x)$ e $C(x)$ forem as funções proposicionais que afirmam que x conhecece Java, Prolog e C++, respectivamente, então temos $\exists x(J(x) \wedge P(x) \wedge C(x))$ se o domínio for apenas seus colegas, ou $\exists x(Y(x) \wedge J(x) \wedge P(x) \wedge C(x))$ se o domínio for todas as pessoas. Se $K(x,y)$ significar que a pessoa x conhece a linguagem de programação y, então podemos reescrever esta última como $\exists x(Y(x) \wedge K(x, \text{Java}) \wedge K(x, \text{Prolog}) \wedge K(x, \text{C++}))$.
    (d) Se $T(x)$ for "x gosta de comida tailandesa", então temos $\forall xT(x)$ se o domínio for apenas seus colegas de classe, ou $\forall x(Y(x) \to T(x))$ se o domínio for todas as pessoas. Se $E(x,y)$ significa que a pessoa x gosta da comida de tipo y, então podemos reescrever esta última como $\forall x(Y(x) \to E(x, \text{tailandesa}))$.
    (e) Se $H(x)$ for "x joga hóquei", então temos $\exists x\neg H(x)$ se o domínio for apenas seus colegas de classe, ou $\exists x(Y(x) \wedge \neg H(x))$ se o domínio for todas as pessoas. Se $P(x,y)$ significa que a pessoas x joga o jogo y, então podemos reescrever esta última como $\exists x(Y(x) \wedge \neg P(x, \text{hoquei}))$.
15. Indique por $T(x)$ o fato de x ser uma tautologia e por $C(x)$ o fato de ser uma contradição.
    (a) $\exists xT(x)$
    (b) $\forall x(C(X) \to T(\neg x))$
    (c) $\exists x\exists y(\neg T(x) \wedge \neg C(x) \wedge \neg T(y) \wedge \neg C(y) \wedge T(x \vee y))$
    (d) $\forall x\forall y((T(x) \wedge T(y)) \to T(x \wedge y))$
16. (a) $Q(0,0,0) \wedge Q(0,1,0)$
    (b) $Q(0,1,1) \vee Q(1,1,1) \vee Q(2,1,1)$
    (c) $\neg Q(0,0,0) \vee \neg Q(0,0,1)$
    (d) $\neg Q(0,0,1) \vee \neg Q(1,0,1) \vee \neg Q(2,0,1)$
17. (a) Seja $T(x)$ o predicado que x aprende truques novos, e considere o domínio como sendo cães velhos. O original é $\exists xT(x)$. A negação é $\forall x\neg T(x)$:"Nenhum cão velho aprende novos truques".
    (b) Seja $C(x)$ o predicado que x sabe cálculo, e consideree o domínio como sendo coelhos. O original é $\neg\exists xC(x)$. A negação é $\exists xC(x)$: "Existe coelho que sabe cálculo".
    (c) Seja $F(x)$ o predicado que x pode voar, e considere o domínio como sendo pássaros. O original é $\forall xF(x)$. A negação é $\exists x\neg F(x)$: "Existe pássaro que não pode voar".
    (d) Seja $T(x)$ o predicado que x fala, e considere o domínio como sendo cães. O original é $\neg\exists xT(x)$. A negação é $\exists xT(x)$: "Existe cão que fala".
    (e) Seja $F(x)$ e $R(x)$ os predicados que x fale francês e russo, respectivamente, e considere o domínio como sendo pessoas em sua sala. O original é $\neg\exists x(F(x) \wedge R(x))$. A negação é $\exists x(F(x) \wedge R(x))$: "Existe alguém nesta sala que fala francês e russo".
18. (a) Não existe contraexemplo. (b) $x = 0$. (c) $x = 2$.
19. (a) $\forall x((F(x, 25.000) \vee S(x, 25)) \to E(x))$, em que $E(x)$ é "a pessoa x se qualificou como um viajante de elite em um dado ano", $F(x,y)$ é "a pessoa x voa mais de y milhas em um dado ano", e $S(x,y)$ é "a pessoa x pega mais de y vôos em um dado ano". Domínio: passageiros da companhia.
    (b) $\forall x([(M(x) \wedge T(x,3)) \vee (\neg M(x) \wedge T(x,3,5))] \to Q(x))$, em que $Q(x)$ é "a pessoa x se classifica para a maratona", $M(x)$ é "a pessoa x é um homem", e $T(x,y)$ é "a pessoa x correu a maratona em menos de y horas". Domínio: competidores da maratona.
    (c) $\forall x(M(x) \to ((H(x,60) \vee (H(x,45) \wedge T(x))) \wedge \forall yG(x,B,y)))$, em que $M(x)$ é a proposição "o estudante recebeu o título de mestre", $H(x,y)$ é "o estudante x frequentou no mínimo y horas-aula", $T(x)$ é a proposição "o estudante x escreveu uma tese", e $G(x,z,y)$ é "a pessoa x teve conceito z ou maior no curso y". Domínio para x: estudantes do curso. Domínio para y: disciplinas cursadas por x.
    (d) $\exists x((T(x,21) \wedge \forall yG(x,A,y))$, em que $T(x,y)$ é "a pessoa x cursou mais de y créditos" e $G(x,z,y)$ é "a pessoa x teve conceito z no curso y". Domínio para x: estudantes do curso. Domínio para y: disciplinas cursadas por x.
20. (a) Se existe uma impressora que esteja tanto quebrada quanto ocupada, então algum trabalho foi perdido.
    (b) Se toda impressora estiver ocupada, então existe trabalho na fila.
    (c) Se existe trabalho que esteja tanto na fila quanto perdido, então alguma impressora está quebrada.
    (d) Se toda impressora estiver ocupada e todo trabalho estiver na fila, então algum trabalho foi perdido.
21. (a) $\exists xF(x,10) \to \exists xS(x)$, em que $F(x,y)$ é "o disco x tem mais de y KB de espaço livre", e $S(x)$ é "a mensagem x pode ser salva".
    (b) $\exists xA(x) \to \forall x(Q(x) \to T(x))$, em que $A(x)$ é "o alerta x está ativado", $Q(x)$ é "a mensagem x está na fila" e $T(x)$ é "a mensagem x foi transmitida".
    (c) $\forall x((x \neq \text{console principal}) \to T(x))$, em que $T(x)$ é "a tela de diagnóstico rastreia o *status* do sistema x".
    (d) $\forall x(\neg L(x) \to B(x))$ em que $L(x)$ é "o participante x foi colocado em uma lista especial" e $B(x)$ é "o participante x receberá uma conta a pagar".
22. Elas não são equivalentes. Seja $P(x)$ qualquer função proposional que seja às vezes verdadeiramente e às vezes falsa, e seja $Q(x)$ qualquer função proposicional que seja sempre falsa. Então $\forall x(P(x) \to Q(x))$ é falsa, mas $\forall xP(x) \to \forall xQ(x)$ é verdadeira.
23. Ambas são verdadeiras precisamente quando temos pelo menos um elemento do domínio que torna pelo menos uma das proposições verdadeira.
24. Contraexemplo: seja a o único elemento do domínio tal que $P(a)$ é V, e seja b o único elemento do domínio tal que $Q(b)$ é V. Então, se a e b são distintos, temos que $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$ é V e $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ é F.