Matemática Discreta
Lista de Exercícios 02

Técnicas de Demonstrações

Prova Direta

1. Mostre que a soma de dois números inteiros ímpares é par.
2. Mostre que a soma de um número par e um ímpar é ímpar.
3. Mostre que a soma de dois números pares é par.
4. Mostre que o produto de dois números pares é par.
5. Mostre que o produto de dois números ímpares é ímpar.
6. Mostre que o quadrado de um número par é um número par.
7. Mostre que o quadrado de um número ímpar é um número par.
8. Mostre que se $m + n$ e $n + p$ são números inteiros pares, em que m,n e p são inteiros, então $m + p$ é par.
9. Mostre que se a soma de dois números é par então a sua diferença também é par.
10. Mostre que se a diferença entre dois números é par então a sua soma também é par.
11. Mostre que se $3n + 2$ é par então $n + 5$ é ímpar.
12. Mostre que se n é ímpar então $5n + 6$ é ímpar.
13. Mostre que se n é ímpar então $n^2 - 6n + 5$ é par.
14. Mostre que para todo inteiro n, $4(n^2 + n + 1) - 3n^2$ é um quadrado perfeito.
15. Mostre que a diferença de dois quadrados perfeitos consecutivos é ímpar.
16. Mostre que para todo inteiro n e m, se $n - m$ é par então $n^3 - m^3$ é par. [Dica: Divida $(n^3 - m^3)$ por $(n - m)$ e descubra que $(n^3 - m^3) = (n - m)(n^2 + nm + m)$].
17. Mostre que a soma de dois racionais é um número racional.
18. Mostre que a diferença de dois números racionais é um número racional.
19. Mostre que o produto de dois números racionais é um número racional.

Prova pela contrapositiva

20. Mostre que se $x^2 - 6x + 5$ é par então x é ímpar.
21. Mostre que se $3n + 2$ é par então n é par.
22. Mostre que se n^2 é par então n é par.
23. Mostre que se $5n + 6$ é ímpar então n é ímpar.
24. Mostre que se $7n + 4$ é par então n é par.
25. Mostre que para todo m e n inteiros, se mn é par então m é par ou n é par.
26. Mostre que se x é irracional então $\dfrac{1}{x}$ é irracional.
27. Mostre que se n não divide ab então n não divide a e n não divide b. (Se $n \not| ab$ então $n \not| a$ e $n \not| b$)
28. Mostre que para todo inteiros a,b e c, se $a \not| (b + c)$ então $a \not| b$ e $a \not| c$.
29. Mostre que se $n = ab$, onde a e b são inteiros positivos, então $a \leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$.
30. Mostre que se $n = abc$, em que a,b, e c são números inteiros positivos, então $a \leq \sqrt[3]{n}$, $b \leq \sqrt[3]{n}$ ou $c \leq \sqrt[3]{n}$.

Prova por casos

31. Demonstre que se n é inteiro então $n^2 \geq n$. [Dica: use uma prova por casos, considere os casos que $n = 0$, $n \geq 1$ e $n \leq 1$].
32. Demonstre que todo quadrado perfeito pode ser escrito como 4q ou 4q + 1. [Dica: use uma prova por casos, considerando todo número n pode ser escrito como 2k ou 2k+1.]
33. Demonstre que se n é ímpar então $n^2 - 1$ é divisível por 8. [Dica: use uma prova por casos, considerando que todo número n pode ser escrito como 4k, 4k+1, 4k+2 ou 4k+3].
34. Demonstre a desigualdade triangular, que afirma que se x e y são números reais, então $|x| + |y| \geq |x + y|$ (em que $|x|$ representa o valor absoluto de x, ou seja, se $x >= 0$ então $|x| = x$, caso contrário, $|x| = -x$). [Use uma demonstração por casos, considere os seguintes casos:

   - $x \geq 0$ e $y \geq 0$
   - $x \geq 0$ e $y < 0$
   - $x < 0$ e $y \geq 0$
   - $x < 0$ e $y < 0$

   ]
35. $x + |x - 7| \geq 7$ para todos os números reais x. [Dica: Considere dois casos: $x \geq 7$ ou $x < 7$].
36. $|x + 3| - x > 2$ para todos os números reais x.
37. Se n não é divisível por 3 então n^2 também não é. [Dica: Todo número inteiro n pode ser escrito como $3k$, $3k + 1$ ou $3k + 2$].
38. Se n não é divisível por 5 então n^2 também não é.
39. $|x - 1| + |x + 5| \geq 6$, para todo número real x.
40. Se a e b são números reais, então $||a| - |b|| \leq |a - b|$

Prova de equivalência

41. Mostre que para todo inteiro n, se n é par se somente se $31n + 12$ é par.
42. Mostre que para todo inteiro n, se n é ímpar então $7n + 8$ é ímpar.
43. Demonstre que para todo inteiro positivo, se n é par se somente se $7n + 4$ é par.
44. Mostre que as seguintes proposições são equivalentes:

    (a) n é par
    (b) $3n + 1$ é ímpar.
    (c) $3n$ é par.
45. Mostre que as seguintes proposições são equivalentes:

    (a) a é menor que b.
    (b) a média de a e b é maior que a.
    (c) a média de a e b é menor que b.
46. Mostre que as seguintes proposições são equivalentes:

    (a) $3n + 2$ é par.
    (b) $n + 5$ é ímpar.
    (c) n^2 é par.

Prova por absurdo

47. Use uma prova por absurdo para mostrar que pelo menos um dos reais $a_1, \ldots, a_n$ é maior que ou igual ao valor da média desses números.
48. Mostre que se n^2 é irracional então n é irracional.
49. Use uma prova por absurdo para mostrar que se x é racional e y é irracional então $x + y$ é irracional.
50. Use uma prova por absurdo para mostrar que $\sqrt{3}$ é irracional.
51. Mostre que $\sqrt[3]{2}$ é irracional.
52. Mostre que $log_4 6$ é irracional.
53. Prove que para todos números reais x e y, se $x+y \geq 100$ então $x \geq 50$ ou $y \geq 50$
54. Mostre que para todo número reais x e y, se $xy > 25$ então $x > 5$ ou $y > 5$
55. Prove que a diferença entre um número racional qualquer e número irracional qualquer é irracional.
56. Use uma prova por absurdo para mostrar que há uma infinidade de números primos. [Dica: suponha que a quantidade de números primos é finitos. Logo, o conjunto dos primos é $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Mostre que esse conjunto não pode ser finito.]
57. Uma celebridade é uma pessoa que todas as outras conhecem, mas que não conhece nenhuma das outras (imagine-se, por exemplo, o presidente Bush na turma teórica desta disciplina). Mostre que em um grupo de pessoas há no máximo uma celebridade.
58. Mostre que se há 2015 pessoas em uma festa, então duas delas conhecem o mesmo número de pessoas entre as presentes. [Dica: Note que o número de pessoas que cada um conhece pode ser $0, 1, \ldots, 2014$.]

Exercícios Adicionais

59. Demonstre que se n é quadrado perfeito então $n + 2$ não é quadrado perfeito.
60. Demonstre que se x é racional e $x \neq 0$ então $\dfrac{1}{x}$ é racional.
61. Demonstre que para todo inteiro n, se $3n + 2$ é par então n é par, usando:

    (a) uma demonstração por contraposição.
    (b) uma demonstração por contradição.
62. Prove ou dê um contra-exemplo: Se m e n são inteiros positivos e m e n são quadrados perfeitos então $m + n$ é um quadrado perfeito