

Teoria dos Jogos Combinatórios em Grafos

*Samuel N. Araújo
Nicolas A. Martins
Nicolas Nisse
Rudini M. Sampaio*

35º Colóquio
Brasileiro de
Matemática

impa

Instituto de Matemática
Pura e Aplicada

Teoria dos Jogos Combinatórios em Grafos

Teoria dos Jogos Combinatórios em Grafos – 1ª edição

Julho de 2025

Copyright © 2025 Samuel N. Araújo, Nicolas A. Martins, Nicolas Nisse e Rudini M. Sampaio

Direitos reservados por Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA. Não é permitida a reprodução total ou parcial desta obra, por quaisquer meios, sem a prévia autorização por escrito da instituição.

Publicado no Brasil / Published in Brazil

ISBN 978-85-244-0589-1

MSC (2020) 05C57; 91A46; 91A05; 91A24

Coleção Colóquios Brasileiros de Matemática

Produção **Editora** Pi **Capa** IMPA

Realização da Editora do IMPA

IMPA

Estrada Dona Castorina, 110

Jardim Botânico

22460-320 Rio de Janeiro RJ

www.impa.br

editora@impa.br

T314 Teoria dos Jogos Combinatórios em Grafos. / Samuel N. Araújo ... [et al.].
- Rio de Janeiro: IMPA, 2025.

245 p.: il. Color - (Coleção Colóquios Brasileiros de Matemática)

E-book

ISBN 978-85-244-0589-1

1.. I. Martins, Nicolas A. II. Nisse, Nicolas. III. Sampaio, Rudini M.
IV. Título. V. Série.

CDD: 511.5

Carolina Celano Lima/CRB-7: 2438

Teoria dos Jogos Combinatórios em Grafos

*Samuel N. Araújo
Nicolas A. Martins
Nicolas Nisse
Rudini M. Sampaio*

PRIMEIRA EDIÇÃO
RIO DE JANEIRO
2025



Instituto de Matemática
Pura e Aplicada

Agradecimentos

Dedico este livro à minha esposa, Bruna Davylla, e às nossas filhas, Alice e Olívia, cujo apoio e presença tornaram possível a conclusão desta obra.

Samuel N. Araújo

Dedico este livro à minha esposa, Carliane Minely, a minhas filhas Cecília e Clarice e aos meus pais, Silvia e Evandro, sem os quais jamais poderia ter escrito estas linhas.

Nicolas A. Martins

Meus agradecimentos vão para Inria associated team CANOE (Combinatorial Algorithms for Networking prOblEms) e CAPES-Cofecub project Ma 1004/23.

Nicolas Nisse

Dedico este livro à minha esposa Ana Karina e a nossos filhos Samuel, Catarina e Miguel, que tiveram paciência pelas noites viradas escrevendo este livro. Que Deus os abençoe sempre e também a todos os que lerem estas páginas!

Rudini M. Sampaio

Os autores gostariam de agradecer aos estudantes João Marcos Brito e Edileudo Filho pela ajuda com a revisão bibliográfica, construção de figuras e pequenas correções.

SNA, NAM, NN, RMS

Prefácio

Como veremos, a área de Jogos Combinatórios não é uma área tão jovem de pesquisa. O primeiro resultado forte desta área se remete a Bouton (1901), que forneceu uma elegante solução matemática completa para o jogo NIM. Recentemente, vários pesquisadores de Combinatória e Teoria da Computação têm estudado jogos combinatórios aplicados a grafos. Apesar da vasta literatura recente em artigos de periódicos e de conferências, percebe-se que a Teoria dos Jogos Combinatórios aplicada a grafos não se encontra muito bem concentrada em livros. Existem os livros clássicos “*On Numbers and Games*” de Conway (1976) e “*Winning Ways*” de Berlekamp, Conway e Guy (1982), que não são focados em jogos em grafos. Entre os livros recentes, existem livros sobre aspectos desta teoria, como o excelente “*Positional Games*” de Hefetz et al. (2014), ou livros focados em um tipo de jogo específico, como o livro “*Domination Games Played on Graphs*” de Brešar, Henning et al. (2021).

Nesse contexto, parecia importante a produção de um material que conseguisse mostrar os principais elementos teóricos de jogos combinatórios e sua aplicação para jogos em grafos, indo tanto da obtenção de estratégias vencedoras até resultados de combinatória extremal e provas de PSPACE-completude. Como será mostrado a área de jogos não é brincadeira. Este livro em português é um convite para que você se anime com essa belíssima área e ajude nossa comunidade a desenvolvê-la cada vez mais.

Como usar este livro

Este livro foi escrito como parte de um minicurso do 35º Colóquio Brasileiro de Matemática (IMPA) em Julho de 2025. Foi o minicurso introdutório deste colóquio com maior número de participantes, o que lhe rendeu

o maior e mais prestigiado auditório do IMPA, o Auditório Ricardo Mañé. Há muito tempo existia a vontade de escrever um livro nessa área por parte de alguns pesquisadores e essa foi uma excelente oportunidade para isso.

Buscamos fornecer um conteúdo autocontido, para que estudantes possam compreender o tema sem a necessidade de recorrer a outras fontes. No entanto, em alguns capítulos, principalmente nos temas mais técnicos, existem apenas menções a certos resultados, com a devida referência bibliográfica.

O livro é dividido em três partes. A Parte I contém os principais elementos teóricos dos jogos combinatórios. A Parte II contém a aplicação dos elementos teóricos para jogos em grafos pesquisados recentemente. A Parte III contém um resumo da teoria de jogos partizan na variante normal e o sistema numérico do grupo de Conway, que inclui os números surreais, bem como algumas aplicações em jogos em grafos.

Rio de Janeiro, 10 de Agosto de 2025.

Os autores

Conteúdo

I	Teoria dos Jogos Combinatórios	1
1	Introdução a Jogos Combinatórios	3
1.1	Jogo Combinatório e Árvore de Jogo	6
1.2	Estratégia Vencedora e o Teorema de Zermelo	8
1.3	Classificação de Jogos Combinatórios	11
1.4	Exercícios	19
2	Teoria de Sprague-Grundy de Jogos Imparciais	21
2.1	Jogo NIM	22
2.2	Teorema de Sprague-Grundy	24
2.3	Aplicação: Nimbers do jogo KAYLES	26
2.4	Exercícios	30
3	Combinatória Extremal para Jogos	31
3.1	Técnica do Potencial e os Soldados de Conway	32
3.2	Teorema de Erdős-Selfridge para Maker-Breaker	34
3.3	Teoremas de Beck para Maker-Breaker	36
3.4	Teorema de Hales-Jewett e o Jogo da Velha n^d	38
3.5	Teorema de van der Waerden e o JOGO DA P.A.	41
3.6	Outro Teorema de Beck e o jogo CLIQUE-RAMSEY	44
3.7	Exercícios	47
4	Jogos Posicionais	49
4.1	Estratégia de Pareamento e o Jogo da Velha n^2	50
4.2	Roubo de Estratégia e o jogo HEX	55
4.3	Complexidade de Jogos Posicionais	58

4.4	Jogos sobre as arestas de um grafo.	60
4.5	Jogos sobre os vértices de um grafo	63
4.6	Outras regras e convenções de vitória	66
4.7	Exercícios	70
5	Complexidade Computacional de Jogos	73
5.1	Classes P, NP, PSPACE e EXPTIME	74
5.2	Reduções entre jogos combinatórios	78
5.3	PSPACE-completude: exemplos de provas	80
5.4	EXPTIME-completude e os Jogos Universais	87
5.5	Exercícios	95
II	Jogos Combinatórios em Grafos	97
6	Jogos de Convexidade em Grafos	99
6.1	Primeiros jogos de convexidade geodésica	101
6.2	Nimbers do jogo CIG_g de Intervalo	104
6.3	Nimbers do jogo HG_g de Envoltória	107
6.4	Jogos de Envoltória são PSPACE-completos	109
6.5	Últimos jogos de convexidade geodésica	112
6.6	Jogos de convexidades não geodésicas	116
6.7	Exercícios	117
7	Jogos de Coloração em Grafos	119
7.1	Propriedades do Jogo de Coloração	121
7.2	Limitantes para $\chi_g(G)$	122
7.3	Complexidade do Jogo de Coloração	127
7.4	Outras variantes do Jogo de Coloração	130
7.5	Exercícios	132
8	Jogos de Dominação em Grafos	133
8.1	O Número Jogo de Dominação	134
8.2	O Teorema $\frac{2}{3}$ e a Conjectura $\frac{3}{5}$	137
8.3	Nimbers do Jogo Normal de Dominação	139
8.4	Jogo Misère de Dominação	142
8.5	Exercícios	143

9	Jogos de Polícia e Ladrão em Grafos	145
9.1	Grafos cop-win	147
9.2	Cop-number e a Conjectura de Meyniel	148
9.3	Polícia e Ladrão em Classes de Grafos	152
9.4	Variantes do Jogo de Polícia e Ladrão	159
9.5	Exercícios	161
III	Grupo de Conway dos Jogos Combinatórios	163
10	Jogos Normais Partizan em Grafos	165
10.1	Notação $\{X Y\}$ e a Soma de Jogos	167
10.2	Jogos, Números e a Lei da Simplicidade	176
10.3	Jogos Infinitesimais e Quase Números	181
10.4	Evite Jogos que são Números !	184
10.5	Jogos Quentes e a Teoria da Temperatura	187
10.6	Aplicação em grafos: jogo KAYLES-PARTIZAN	190
10.7	Aplicação em grafos: jogo CIG_g PARTIZAN	192
10.8	Exercícios	192
	Apêndices	195
A	Teoria dos Grafos	197
B	Complexidade Computacional	201
	Bibliografia	209
	Índice Remissivo	227
	Índice de Autores	231
	Índice de Notações	233

Parte I

Teoria dos Jogos Combinatórios

1

Introdução a Jogos Combinatórios

"I just play all the time and I am fortunate enough to get paid for it"

Martin Gardner, 1998

Os jogos fazem parte de todas as culturas e são uma das formas mais antigas de interação social. Como exemplo, historiadores afirmam que o famoso jogo de Damas é jogado desde 3000 a.C. na Mesopotâmia, sendo mencionado por Platão e Homero, jogos do tipo Mancala desde 5000 a.C. na África, o Jogo da Velha (TicTAcToe) desde 1500 a.C. no Antigo Egito, o jogo Go desde 500 a.C. na China e o jogo Chaturanga (pai do Xadrez) desde 600 d.C na Índia.

Uma das áreas da matemática que estuda jogos é a chamada "*Matemática Recreativa*" (*Recreational Mathematics*), relacionada a criação e resolução de quebra-cabeças matemáticos ou *puzzles* (jogos de 1 jogador). Autores que se destacam nessa área incluem:

- Lewis Carrol: pseudônimo de Charles Dodgson, autor de *Alice no País das Maravilhas* (Carrol 1865) e *The Game of Logic* (Carrol 1886),
- Sam Loyd: considerado o maior criador de puzzles dos Estados Unidos em 1898, autor do livro *Cyclopedia with 5000 puzzles* (Loyd 1914),
- Henry Dudeney: considerado o maior da Inglaterra, autor do livro "*Amusements in Mathematics*"¹(Dudeney 1917),
- Martin Gardner: autor da coluna "*Mathematical Games*" da *Scientific American* durante 25 anos, de 1956 a 1981.

¹ Apresentado na prestigiada revista Nature em "*Amusements in Mathematics*" (1917).

Variantes de alguns dos jogos criados por esses autores são estudadas até hoje em Teoria da Computação. Por exemplo, Dudeney (1907) criou o jogo KAYLES² de obtenção de um conjunto independente em um grafo, que foi provado PSPACE-difícil por Schaefer (1978). Dudeney (1917) também propôs o “*Puzzle with Pawns*”, que originou o Jogo da Posição Geral em um grafo, que foi provado PSPACE-difícil por Chandran S. V. et al. (2024). Ademais, o jogo da Coloração em Grafos foi apresentado por Gardner (1981) e só provado PSPACE-difícil por Costa, Pessoa et al. (2020).

Os principais jogos considerados por esses autores são os chamados *jogos combinatórios*, que são jogos sequenciais finitos, com 2 jogadores que se alternam em turnos, com informação completa (por exemplo, sem cartas escondidas), sem aleatoriedade (por exemplo, sem lançamento de dados) e com vitória, derrota ou empate como resultado. Convém frisar aqui a diferença entre a Teoria Combinatória dos Jogos e a Teoria (Econômica) dos Jogos, que lida com jogos de informação incompleta (como Poker) ou com aleatoriedade (como Ludo ou Gamão) ou com diferentes resultados (como o Dilema dos Prisioneiros). Neste livro, iremos nos concentrar em jogos combinatórios e suas diferentes categorias, como jogos imparciais, jogos partizan e jogos posicionais.

No início do século XX, Bouton (1901) realizou o primeiro estudo teórico completo de um jogo combinatório não trivial: o jogo NIM. Nos anos 1930, Sprague (1936) e Grundy (1939) usaram o jogo NIM para representar qualquer jogo normal imparcial através de números chamados *nimbers*, dando origem a *Teoria de Sprague-Grundy*, que será vista no Capítulo 2.

Nos anos 1970, John H. Conway desenvolveu uma riquíssima teoria para jogos partizan em dois livros clássicos: “*On numbers and games*” (Conway 1976) e “*Winning ways for your mathematical plays*” (Berlekamp, Conway e Guy 1982). Este último deixaria Lewis Carroll orgulhoso por tantas gravuras divertidas e jogos intrigantes, como o Hakenbush e os Soldados de Conway. Esta teoria é parte do que se chama atualmente por *Teoria Combinatória dos Jogos*, que será vista no Capítulo 10 e se utiliza do conceito de *números surreais*, criados em 1969 por Conway e introduzidos ao público pela primeira vez pelo renomado cientista da computação Donald Knuth

² Alguns autores diferenciam o jogo KAYLES original de Dudeney (1907), enquanto chamam de NODE-KAYLES o jogo para grafos gerais. Seguimos outros autores, como Bodlaender e Kratsch (2002), que usam apenas o nome KAYLES.

(1974), criador do TeX, em um conto matemático com título engraçado: “*Surreal Numbers: How Two Ex-Students Turned on to Pure Mathematics and Found Total Happiness*”.

Também nos anos 1970, Paul Erdős, um dos matemáticos mais prolíficos da história, publicou alguns artigos de Combinatória sobre jogos que se tornaram clássicos na Teoria de Ramsey. Tais resultados combinatórios famosos sobre jogos serão vistos no Capítulo 3, incluindo o Teorema de Hales e Jewett (1963), o Teorema de Erdős e Selfridge (1973) para jogos MAKER-BREAKER, o Teorema de Chvátal e Erdős (1978) para jogos tendenciosos e os Teoremas de Beck (1981b) sobre o jogo Clique-Ramsey e o jogo de van der Waerden (ou jogo da progressão aritmética).

Dentre os jogos mencionados no parágrafo anterior, destacam-se os jogos posicionais, como os clássicos TICTACTOE e HEX. O jogo HEX foi criado nos anos 1940 independentemente por Piet Hein e John Nash, ganhador do Prêmio Nobel retratado no filme “*Mente Brilhante*” por seus resultados em Teoria Econômica dos Jogos (Nash 1953), como o Equilíbrio de Nash. Os jogos posicionais mais conhecidos são os do tipo MAKER-BREAKER em que um jogador deseja obter uma configuração vencedora e o outro deseja impedir. No Capítulo 4, veremos tais jogos e suas técnicas principais, como o *roubo de estratégia* (*strategy stealing*) e a *estratégia de pareamento* (*pairing*).

Ainda nos anos 1970, houve grande crescimento da área de Complexidade Computacional. Cook (1971) obteve a primeira prova de NP-completude (para o problema SAT de satisfatibilidade lógica) e, na sequência, Karp (1972) provou que vários problemas clássicos são NP-completos. Stockmeyer e Meyer (1973) obtiveram a primeira prova de PSPACE-completude, para o problema QSAT (*Quantified SAT*), também chamado de TQBF. Notou-se que problemas PSPACE-completos podem ser geralmente associados a jogos. Por exemplo, QSAT pode ser visto como um jogo partizan. Schaefer (1978) provou que vários jogos clássicos são PSPACE-completos, como o jogo imparcial KAYLES e o jogo posicional MAKER-BREAKER. No Capítulo 5, mostramos como provar que um jogo é PSPACE-completo, obtendo estratégias vencedoras para cada jogador a partir de estratégias vencedoras de algum jogo PSPACE-completo conhecido.

Finalmente, nos Capítulos 6, 7, 8 e 9, apresentamos alguns jogos em grafos bastantes estudados atualmente, como Jogos de Coloração, de Dominação, de Convexidade e Jogos de Perseguição, como Polícia e Ladrão.

Nesta breve exposição, notamos que a área de jogos não é brincadeira, mas sim um campo de estudo avançado que envolve pesquisadores de altíssimo nível. Mas, antes de tudo, mostraremos nas próximas seções as definições principais sobre jogos combinatórios e alguns exemplos.

1.1 Jogo Combinatório e Árvore de Jogo

Uma *posição* de um jogo representa um estado ou configuração possível do jogo, incluindo a informação de quem é o próximo a jogar. Como visto na seção anterior, um *jogo combinatório*³ possui as seguintes propriedades:

- 2 jogadores: geralmente Alice (1º jogador) e Bob (2º jogador);
- Sequencial: jogadores se alternam em turnos;
- Finito: há um número finito de posições e há alguma regra limitando o número de repetições possíveis de cada posição;
- Informação completa (ou perfeita): em cada momento, todos os jogadores conhecem todas as informações referentes ao jogo;
- Sem aleatoriedade: por exemplo, sem lançamento de dados;
- Resultado: vitória, derrota ou empate.
- Regras razoáveis: cada jogador pode determinar rapidamente (tempo polinomial no tamanho da posição) os movimentos que pode fazer, as posições que serão obtidas com cada movimento e se a posição atingiu as condições de término do jogo e, nesse caso, qual o seu resultado.

Como dito por Beck (2008) no prefácio de seu livro, uma das poucas contribuições da Teoria Econômica dos Jogos para a Teoria Combinatória dos Jogos é a análise da árvore de jogo a partir de algum algoritmo *backtracking*, que definiremos a seguir.

Dizemos que uma posição Q_1 *leva* a uma posição Q_2 se é possível obter Q_2 a partir de Q_1 em uma jogada. A *Árvore de Jogo* (*game tree*) é um grafo direcionado onde os vértices representam todas as posições possíveis do jogo e uma aresta direcionada de Q_1 para Q_2 indica que a posição Q_1

³ Alguns autores, como Siegel (2013), permitem jogos combinatórios com número infinito de posições ou repetições ilimitadas de posições, além de chamar os jogadores de *Left* e *Right*. Neste livro, iremos nos concentrar em jogos finitos e preferimos Alice e Bob, pois são os nomes mais comumente usados em Jogos em Grafos.

leva à posição Q_2 . A Figura 1.1 mostra parte da Árvore de Jogo a partir de uma posição do Jogo da Velha (TicTACToe). Note que, jogando “X”, Alice tem uma estratégia de empate a partir desta posição jogando em (a). Para quem não conhece, o Jogo da Velha consiste de um tabuleiro 3×3 em que Alice e Bob se alternam marcando qualquer célula com sua marca (“X” para Alice e “O” para Bob). Ambos os jogadores conseguem sempre ver o tabuleiro e as marcas nele a cada turno do jogo. Vence o primeiro a obter uma linha (vertical, horizontal ou diagonal) de 3 células com sua marca. Se não existe tal linha ao final do jogo (após todas as células estarem marcadas), então o jogo termina com empate.

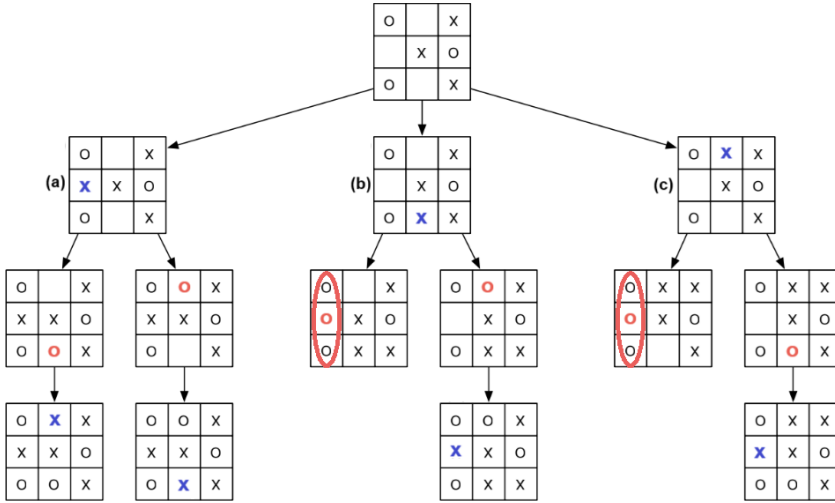


Figura 1.1: Árvore de Jogo a partir de uma posição de TicTACToe. Note que Alice empata jogando em (a), mas perde jogando em (b) ou (c).

Como jogos combinatórios são finitos, a árvore de jogo não pode ter ciclos (o que poderia levar a um jogo infinito), mas não precisa ser desenhada necessariamente como uma árvore. Por exemplo, a Figura 1.2 mostra a árvore do jogo NIM para a posição $(2, 2)$ e parte da árvore do jogo para a posição $(3, 3)$. Nesse jogo, existem k pilhas de objetos em que a pilha i contém n_i objetos. Em cada turno, o jogador escolhe uma pilha e remove qualquer quantidade de objetos de lá. Perde o jogador que não conseguir fazer uma jogada em seu turno, ou seja, todas as pilhas estão vazias. Uma posição de NIM pode ser definida por $(n_1, \dots, n_k)$ e, por simetria, podemos assumir que $n_1 \geq \dots \geq n_k$. Na Figura 1.2, nós azuis (resp. vermelhos)

indicam que o próximo a jogar é Alice (resp. Bob). O nó $(0,0)$ azul (resp. vermelho) é perdedor para Alice (resp. Bob). Bob consegue vencer em ambas as árvores. O Exercício 1.1 pede para provar que Bob sempre vence em posições (n,n) , duas pilhas com mesmo número de objetos.

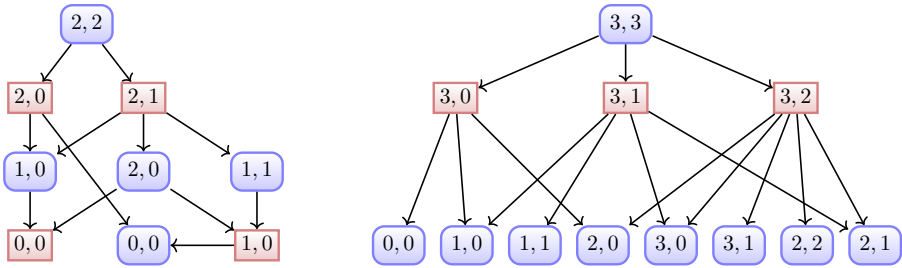


Figura 1.2: Jogo NIM: Árvore de Jogo para a posição $(2,2)$ e parte da Árvore de Jogo para a posição $(3,3)$. Nós azuis (resp. vermelhos) indicam que o próximo a jogar é Alice (resp. Bob). Nó $(0,0)$ azul (resp. vermelho) é perdedor para Alice (resp. Bob). Bob vence em ambas as árvores.

A posição inicial é uma fonte (grau de entrada 0) no grafo direcionado da árvore de jogo, também chamada de *raiz*. As posições finais são sumidouros (grau de saída 0), também chamadas de *folhas* da árvore de jogo. A *profundidade* de uma posição do jogo é a altura da árvore de jogo com raiz naquela posição, ou seja, o tamanho do maior caminho dessa posição até alguma folha. Em outras palavras, é o tamanho da maior sequência possível de jogadas a partir dessa posição até o fim do jogo.

1.2 Estratégia Vencedora e o Teorema de Zermelo

Uma *estratégia vencedora* para um jogador é uma função que determina um movimento para cada posição possível em que o jogador é o próximo a jogar tal que, jogando conforme a função a partir da posição inicial, sempre resultará em uma posição vencedora para o jogador, independente dos movimentos do adversário. Uma *estratégia de empate* é semelhante: resultará em uma posição de empate a partir da melhor estratégia do adversário. Diremos informalmente que um jogador *vence* (resp. *empata*) se possui estratégia vencedora (resp. de empate). Caso contrário, dizemos que o jogador *perde*.

Não é sempre claro se em toda posição de algum jogo (não necessariamente combinatório) há um jogador com estratégia vencedora. Considere, por exemplo, o jogo trivialíssimo com 3 jogadores X, Y e Z e apenas uma jogada: X escolhe o vencedor entre Y e Z. Note que nenhum jogador possui estratégia vencedora nesse jogo estranho.

No entanto, no início do século XX, Ernst Zermelo (1913), matemático muito conhecido por suas contribuições em Teoria dos Conjuntos, como os Axiomas de Zermelo-Fraenkel, provou no teorema abaixo que isso não ocorre para 2 jogadores. John von Neumann (1928) estendeu esse resultado para jogos com informação incompleta em seu *Minimax Theorem*, considerado o ponto inicial da Teoria Econômica dos Jogos, que depois foi aperfeiçoado para incluir jogos com mais de dois jogadores (von Neumann e Morgenstern 1944). Por isso, o teorema abaixo é também chamado de Teorema de Zermelo-von Neumann.

Teorema 1.1 (Zermelo 1913). *Em todo jogo combinatório, um jogador possui uma estratégia vencedora ou os dois possuem uma estratégia de empate.*

Demonstração. Por indução na profundidade do jogo, ou seja, na altura da árvore do jogo. Para altura 0, cada posição final (folha) já define vitória para Alice, vitória para Bob ou empate. Dado $h > 0$, assuma que o teorema vale para todo jogo com profundidade menor que h e considere uma posição P_0 do jogo com profundidade h . Considere ainda que Alice é a primeira a jogar em P_0 . O caso em que Bob é o primeiro a jogar é simétrico.

Sejam $P_1, \dots, P_k$ as posições que podem ser obtidas de P_0 após um movimento de Alice. Como P_0 tem profundidade h , então $P_1, \dots, P_k$ tem profundidade menor que h , sendo Bob o primeiro a jogar nessas posições, e por indução podem ser do tipo A (vencedor para Alice), tipo B (vencedor para Bob) ou tipo 0 (empate). Se existe alguma posição $P_i \in \{P_1, \dots, P_k\}$ do tipo A, então Alice possui uma estratégia vencedora jogando em P_i . Caso contrário, suponha que nenhuma posição em $\{P_1, \dots, P_k\}$ é do tipo A. Se existe alguma posição $P_j \in \{P_1, \dots, P_k\}$ do tipo 0, então Alice possui uma estratégia de empate jogando em P_j , o que também leva a uma estratégia de empate para Bob. Caso contrário, qualquer jogada de Alice leva a uma posição do tipo B e, portanto, Bob possui uma estratégia vencedora. ■

A ideia central na prova do Teorema de Zermelo sugere o algoritmo *backtracking* VITÓRIA-ALICE abaixo sobre a Árvore de Jogo para decidir se Alice vence. Alterando a linha 1 desse algoritmo, marcando folhas em que

há vitória ou empate para Alice, obtemos o algoritmo EMPATE-ALICE que decide se Alice tem estratégia de empate, quando ela não possui estratégia vencedora. É possível obter os algoritmos VITÓRIA-BOB e EMPATE-BOB, trocando Alice por Bob e vice-versa. Note que esses algoritmos tem tempo polinomial no tamanho da Árvore de Jogo (número de posições possíveis) e consequentemente o jogo é resolvível em tempo polinomial sempre que o número de posições é polinomial no tamanho da instância do jogo. Por exemplo, no jogo NIM com um número k constante de pilhas de no máximo n objetos cada, há no máximo n^k posições possíveis e, portanto, é possível decidir o vencedor em tempo polinomial. Veremos no Capítulo 2 um algoritmo mais simples para resolver o jogo NIM para qualquer número de pilhas.

• **Algoritmo VITÓRIA-ALICE:**

1. Marque com rótulo 1 as folhas vencedoras para Alice
2. $T \leftarrow 1$; $\text{nova} \leftarrow \text{true}$
3. **enquanto** (nova) **faça**
4. $T \leftarrow T + 1$; $\text{nova} \leftarrow \text{false}$
5. **para cada** posição P_A não marcada de Alice:
6. **se** (P_A leva a uma posição marcada) **então**
7. Marque P_A com rótulo T ; $\text{nova} \leftarrow \text{true}$
8. $T \leftarrow T + 1$
9. **para cada** posição P_B não marcada de Bob:
10. **se** (P_B leva somente a posições marcadas) **então**
11. Marque P_B com rótulo T ; $\text{nova} \leftarrow \text{true}$
12. **se** (a raiz está marcada) **então**
13. “Alice tem estratégia vencedora”
14. **senão** “Alice não tem estratégia vencedora”

A Figura 1.3 mostra a execução do algoritmo para decidir se Bob possui uma estratégia vencedora nas Árvores do Jogo NIM da Figura 1.2, onde os números em vermelho fora dos nós indicam as posições vencedoras para Bob e a ordem em que elas foram descobertas pelo algoritmo.

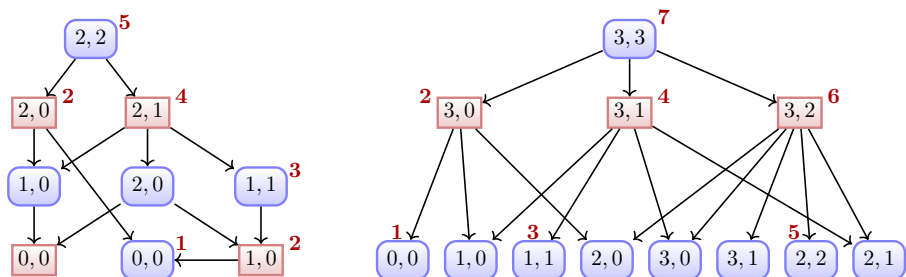


Figura 1.3: Execução do algoritmo VITÓRIA-BOB para verificar que Bob vence (tem estratégia vencedora) nas posições do jogo NIM da Figura 1.2. Os números em vermelho fora dos nós indicam as posições vencedoras (marcadas) para Bob e a ordem em que elas foram descobertas pelo algoritmo.

1.3 Classificação de Jogos Combinatórios

Fornecemos aqui uma classificação que abrange os principais jogos combinatórios conhecidos, mas não tem a intenção de ser completa.

Classificação quanto ao Critério de Vitória: Com relação ao **critério de vitória**, os jogos podem ter as seguintes variantes:

- **Jogo Normal:** Perde o jogador incapaz de jogar em seu turno: exceto em posição inicial sem movimentos, vence o último a jogar.
- **Jogo Misère:** Vence o jogador incapaz de jogar em seu turno: exceto em posição inicial sem movimentos, perde o último a jogar.
- **Jogo de Objetivo:** cada jogador possui um objetivo (um tipo de posição a se alcançar ou se evitar).
- **Jogo de Otimização:** acrescenta-se um número k à instância do jogo de modo que um jogador deseja que certo parâmetro do jogo seja limitado por k (superiormente ou inferiormente, dependendo do jogo) e o outro deseja impedir.

A seguir, fornecemos exemplos para todas essas variantes. Geralmente, assume-se a convenção de jogo normal caso não seja dito explicitamente. O termo *jogo misère* poderia ser traduzido para *jogo pobre* já que, do ponto de vista do jogo normal, o jogador está se esforçando para perder, como

tentando obrigar o adversário a tomar todas as suas peças no jogo de damas. Como exemplo, podemos considerar o jogo NIM-MISÈRE, a variante misère do jogo NIM, ilustrado na Figura 1.4. O Exercício 1.2 pede para provar que Bob (2° a jogar) vence NIM-MISÈRE em posições (n, n) para $n \geq 2$.

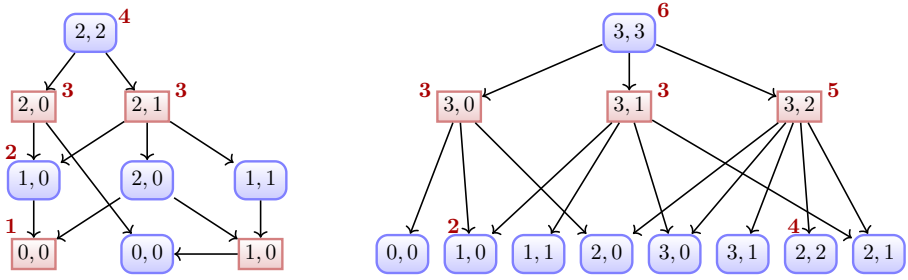


Figura 1.4: Execução do algoritmo VITÓRIA-BOB para verificar que Bob vence nas posições de NIM-MISÈRE da Figura 1.2, a variante misère do jogo NIM. Os números em vermelho fora dos nós indicam as posições vencedoras (marcadas) para Bob e a ordem (rótulo) em que foram descobertas no algoritmo.

Exemplo: jogos KAYLES e CLIQUE-FORMING. No jogo KAYLES, a instância é um grafo, e Alice e Bob se alternam selecionando vértices de modo que os vértices selecionados sempre formem um conjunto independente (sem arestas entre vértices selecionados). Existe o KAYLES (normal), o KAYLES-MISÈRE e o KAYLES de otimização em que, além do grafo, é dado um inteiro k e Alice vence se o número de vértices selecionados for pelo menos k (ou seja, Alice deseja maximizar o número de vértices selecionados enquanto Bob deseja minimizar). A variante partizan normal do KAYLES é mostrada na Seção 10.6. O jogo CLIQUE-FORMING é semelhante ao KAYLES, mas ao invés de gerar um conjunto independente, deve ser gerada uma clique (todos os vértices selecionados possuem arestas entre si). CLIQUE-FORMING é equivalente a KAYLES no complemento do grafo e vice-versa. As variantes normal, misère e de otimização de KAYLES e CLIQUE-FORMING foram provados PSPACE-completas por Schaefer (1978), Chandran S. V. et al. (2024) e Brosse et al. (2025). Veja a Figura 1.5.

Exemplo: JOGO DE DOMINAÇÃO EM GRAFOS. Nesse jogo, a instância é um grafo, e Alice e Bob selecionam vértices alternadamente de modo que o vértice selecionado *domine* pelo menos um vértice que não seja *dominado* pelos vértices selecionados anteriormente, onde dizemos que um vértice u

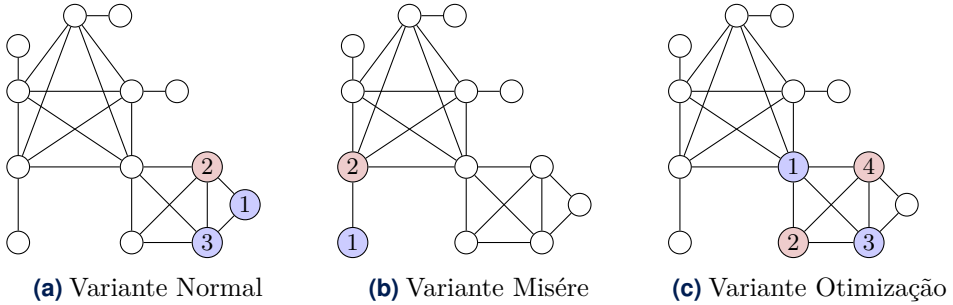


Figura 1.5: Variantes normal, misère e de otimização ($k = 4$) do jogo CLIQUE-FORMING. Note que Alice vence em todas as três com estratégias bem diferentes. Vértices azuis (resp. vermelhos) foram selecionados por Alice (resp. Bob). Os números representam a ordem da seleção dos vértices.

domina v se $u = v$ ou uv é uma aresta. Existe a variante normal, a misère e a de otimização em que, além do grafo, é dado um inteiro k e Alice vence se o número de vértices selecionados for no máximo k (ou seja, Alice deseja minimizar o número de vértices selecionados enquanto Bob deseja maximizar, diferentemente de KAYLES). O Capítulo 8 mostra as variantes normal, misère e de otimização do JOGO DE DOMINAÇÃO.

Exemplo: JOGO DE COLORAÇÃO DE GRAFOS. Nesse jogo, a instância é um grafo G e um inteiro c , e Alice e Bob selecionam vértices alternadamente, colorindo-os com alguma cor em $\{1, \dots, c\}$ de modo que vértices adjacentes tenham cores diferentes. Note que o jogo de Coloração com número de cores $c = 1$ é exatamente o jogo KAYLES. Existe o Jogo de Coloração (normal), o Jogo de Coloração misère e o Jogo de Coloração de otimização em que Alice vence se e só se todos os vértices do grafo forem coloridos. Esta é a variante clássica de otimização do Jogo de Coloração, definida por Bodlaender (1991) junto com o *número jogo cromático* $\chi_g(G)$, que serão vistos no Capítulo 7. Seria possível outra variante de otimização em que é dado também um inteiro k e Alice vence se pelo menos k vértices do grafo forem coloridos com c cores. Tomando $k = n$ (número de vértices do grafo), temos a variante clássica de otimização.

Jogos de otimização levam geralmente à definição de parâmetros numéricos naturais para as instâncias, relacionados ao valor k ótimo (mínimo ou máximo, dependendo do jogo) tal que Alice possui uma estratégia vence-

dora. Como exemplo, Bodlaender (1991) introduziu o *número jogo cromático* $\chi_g(G)$ (*game chromatic number*) como sendo o menor valor de c tal que Alice consegue garantir que todos os vértices sejam coloridos com c cores na variante de otimização do JOGO DE COLORAÇÃO. Phillips e Slater (2001) introduziram o *número jogo de independência* $\alpha_g(G)$ (*game independence number*) e o *número jogo da clique* $\omega_g(G)$ (*game clique number*) de um grafo G como sendo o maior k tal que Alice possui uma estratégia vencedora nos jogos KAYLES e CLIQUE-FORMING de otimização, garantindo um conjunto independente ou uma clique de tamanho pelo menos k , respectivamente. Note que $\omega_g(G) = 4$ no grafo G da Figura 1.5(c).

Exemplo: jogo de objetivo DOT-AND-BOXES. Como exemplo de Jogo de Objetivo, considere o jogo DOT-AND-BOXES (Timbiriche, em português), muito popular antigamente. Nesse jogo, há uma grade $n \times n$ de pontos, inicialmente vazia, e os jogadores marcam linhas horizontais ou verticais entre pontos vizinhos (distância 1). Quando um jogador fecha um quadrado 1×1 , marca a inicial de seu nome no quadrado e ganha um ponto e mais um turno. No final, vence quem tiver mais pontos. Note que Alice vence no exemplo da Figura 1.6. O “objetivo” de cada jogador é atingir uma posição final com mais quadrados marcados com sua inicial.

Classificação quanto às Jogadas: Com relação às **jogadas**, os jogos combinatórios classificam-se como:

- **Jogo Imparcial:** Em qualquer posição, as jogadas possíveis não dependem do jogador. Ou seja, se duas posições diferem apenas no jogador atual (a fazer a próxima jogada), então as jogadas possíveis são as mesmas.
- **Jogo Partizan:** jogo não imparcial.

NIM, DOT-AND-BOXES, KAYLES, CLIQUE-FORMING, JOGO DE DOMINAÇÃO e JOGO DE COLORAÇÃO são jogos imparciais.

Um modo clássico de se obter um jogo partizan a partir de um jogo imparcial é fazer que a instância do jogo tenha seus elementos rotulados com A ou B de modo que Alice (resp. Bob) só pode fazer jogadas em elementos rotulados com A (resp. B). Alguns elementos podem ser rotulados com C indicando que podem ser jogados tanto por Alice como por Bob. Se todos os elementos são rotulados com C, voltamos à variante imparcial.

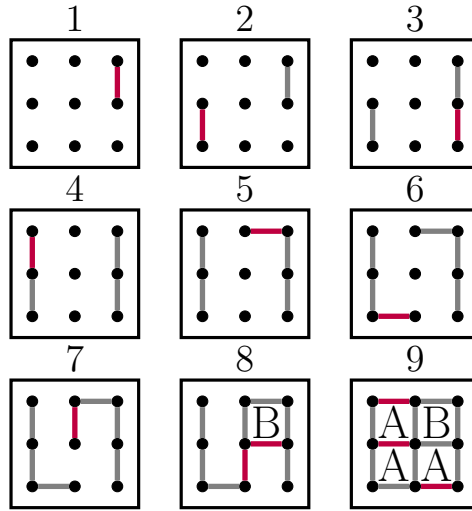


Figura 1.6: Jogo DOT-AND-BOXES, onde A e B se referem a Alice e Bob, respectivamente. As arestas vermelhas são as escolhidas no turno corrente. Alice vence por 3 x 1.

A seguir, mostramos os jogos NIM-PARTIZAN e KAYLES-PARTIZAN baseados nos jogos imparciais NIM e KAYLES.

Exemplo: jogo NIM-PARTIZAN. Nesse jogo, os objetos das pilhas são rotulados com A, B ou C e, em cada turno, Alice (resp. Bob) só pode remover um objeto rotulado com A ou C (resp. B ou C), juntamente com todos os objetos que estão acima dele. A Figura 1.7 mostra dois exemplos de árvore de jogo da variante normal de NIM-PARTIZAN, onde o termo (ABB,BAA) significa que a primeira pilha contém objetos rotulados A, B e B (de baixo para cima) e a segunda pilha B, A e A.

Exemplo: jogo KAYLES-PARTIZAN. Nesse jogo, os vértices do grafo estão rotulados com A ou B, e Alice (resp. Bob) só pode selecionar vértices rotulados com A (resp. B) de modo que o conjunto de todos os vértices selecionados (por Alice e Bob) seja um conjunto independente. Tais problemas são estudados há muito tempo: KAYLES-PARTIZAN e CLIQUE-FORMING-PARTIZAN (substituindo conjunto independente por clique) foram provados PSPACE-difíceis na variante normal por Schaefer (1978).

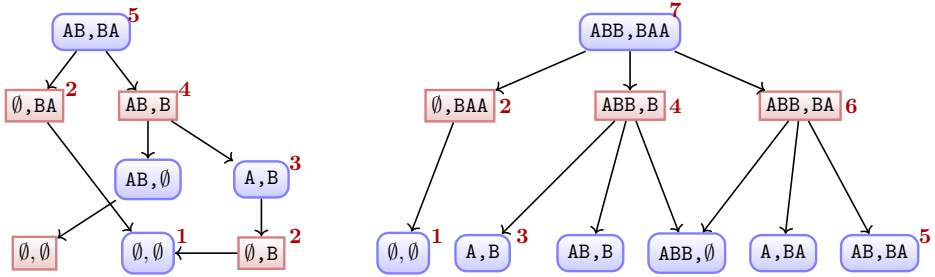


Figura 1.7: Execução do algoritmo para verificar que Bob possui uma estratégia vencedora em duas posições do jogo NIM-PARTIZAN com duas pilhas. AAB significa que a pilha possui 3 objetos rotulados com A, A e B, nessa ordem de baixo para cima. Os números em vermelho fora dos nós indicam as posições vencedoras (marcadas) para Bob e a ordem em que elas foram descobertas.

Exemplo: jogo DOT-BOXES-PARTIZAN. Similar ao jogo imparcial DOT-AND-BOXES, mas cada aresta será desenhada com a cor do jogador que a escolheu. No fim, vence o jogador com mais quadrados 1×1 com todas as arestas na sua cor. Ao contrário do DOT-AND-BOXES, em que todo quadrado 1×1 é contado para algum jogador, haverá quadrados em DOT-BOXES-PARTIZAN sem dono, pois terão arestas de cores diferentes.

JOGOS POSICIONAIS: Outro modo de se obter um jogo partizan (de objetivo) é fazer que cada jogador possa escolher qualquer elemento do jogo para si, de modo que o resultado depende dos dois conjuntos: dos elementos escolhidos por Alice e dos elementos escolhidos por Bob. Esses são os **jogos posicionais**, vistos em detalhes no Capítulo 4. Como exemplo, TIC-TAC-TOE é um jogo partizan de objetivo, que também é posicional, visto que Alice (resp. Bob) marca células de um tabuleiro 3×3 com X (resp. O) e ambos querem obter uma linha, coluna ou diagonal com sua marca.

Formalmente, em um **jogo posicional**, a instância contém um conjunto universo $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ (os elementos do tabuleiro) e uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de U , chamados de conjuntos *críticos*, os quais dependendo da variante são chamados de conjuntos *vencedores* ou de conjuntos *perdedores*. Entre as variantes de jogos posicionais, destacam-se:

- **MAKER-MAKER:** vence o primeiro a obter um conjunto vencedor.

- **MAKER-BREAKER:** Alice vence se conseguir um conjunto vencedor; caso contrário, Bob vence.
- **AVOIDER-FORCER:** Alice vence se conseguir evitar um conjunto perdedor; caso contrário, Bob vence.
- **AVOIDER-AVOIDER:** perde o primeiro a obter um conjunto perdedor.
- **WAITER-CLIENT:** Similar ao MAKER-MAKER, mas, em cada turno, Alice pega 2 elementos, Bob escolhe um e Alice o outro.
- **SCORING GAME** (pontuação): no fim do jogo, vence quem tiver o conjunto vencedor com mais pontos, onde a pontuação de cada conjunto vencedor é dada na instância.

Note novamente que esses jogos posicionais são jogos partizan de objetivo e não seguem a convenção de jogo normal nem de jogo misère, pois o vencedor do jogo não depende de quem é o último a jogar.

A diferença entre MAKER-MAKER e MAKER-BREAKER é que Bob vence se conseguir um conjunto vencedor no primeiro jogo, mas não necessariamente no segundo. Como exemplo, no TIC TAC TOE tradicional (MAKER-MAKER 3×3), não há estratégia vencedora para ninguém: ambos empatam. Mas, na versão MAKER-BREAKER 3×3 , Alice vence (tem estratégia vencedora), pois não precisa se preocupar se Bob está para conseguir um conjunto vencedor: linha, coluna ou diagonal (Exercício 1.4).

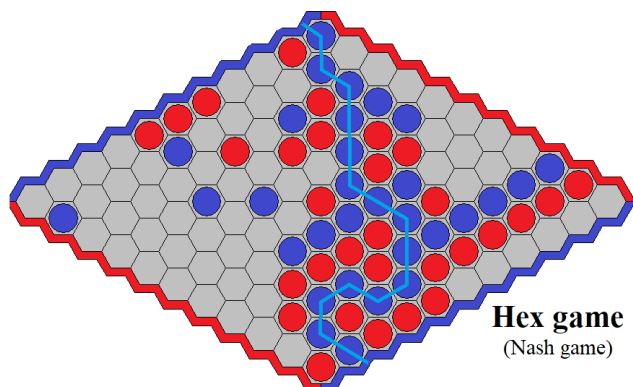


Figura 1.8: Jogo HEX. Alice vence com as peças azuis.

John Nash provou que não há empate em jogos MAKER-BREAKER e que Alice nunca perde jogos MAKER-MAKER, devido ao argumento do *roubo de estratégia* (*strategy stealing*), visto no Capítulo 4.

Exemplo: jogo HEX. É um jogo MAKER-BREAKER, também chamado de jogo Nash, ilustrado na Figura 1.8. No jogo HEX, sobre um tabuleiro com células hexagonais, Alice com as peças azuis tenta conectar os lados azuis, enquanto Bob tenta impedir jogando com as peças vermelhas. Porém, o único modo de Bob impedir é conectando os lados vermelhos, o que poderia parecer então que HEX também é um jogo MAKER-MAKER. Mas não é, pois os conjuntos vencedores são os caminhos ligando os lados azuis e não os vermelhos. Nash provou que, em jogos simétricos como HEX, Alice possui estratégia vencedora (Hayward e Toft 2019). No entanto, não se conhece até hoje uma estratégia explícita para Alice em tabuleiros $n \times n$ com $n \geq 10$ (o tabuleiro padrão do HEX é 11 por 11).

Exemplo: jogo CLIQUE e o jogo SIM. São jogos posicionais, onde são dados inteiros $n > k > 0$, e cada jogador escolhe uma aresta do grafo completo K_n e a colore com sua cor. O jogo CLIQUE é MAKER-MAKER: vence quem primeiro obter uma clique de tamanho k com sua cor. O jogo SIM é AVOIDER-AVOIDER: perde quem primeiro obter uma clique de tamanho k com sua cor. O jogo CLIQUE é visto no Capítulo 4. O jogo SIM foi criado por Simmons (1969). A versão mais comum desses jogos é com $n = 6$ e $k = 3$, em que não há empate nesses jogos pelo Teorema 3.16 de Ramsey.

Mostramos antes que é possível obter um jogo partizan a partir de um jogo imparcial. Também é possível fazer o caminho inverso: obter um jogo imparcial a partir de um jogo partizan. Por exemplo, ilustramos abaixo a versão imparcial do jogo TICTACTOE, que é partizan por definição.

Exemplo: jogo TICTACTOE-IMPARCIAL. Também sobre o tabuleiro 3×3 , Alice e Bob selecionam quadrados, mas todos os quadrados selecionados tem a mesma marca. Na variante normal, vence o primeiro jogador a formar uma linha, coluna ou diagonal com todos os quadrados marcados. Note que Alice possui uma estratégia vencedora bastante simples, selecionando o quadrado do meio e vencendo em sua próxima jogada. A diferença para o TICTACTOE original é que as marcas são idênticas: os quadrados selecionados não tem donos. O Exercício 1.5 pergunta quem vence na variante *misère* 3×3 e nas variantes normal e *misère* 4×4 .

1.4 Exercícios

Exercício 1.1. Prove que Bob sempre vence o jogo NIM para instâncias (n, n) para qualquer $n \geq 0$ (duas pilhas com mesmo número de objetos).

Exercício 1.2. Prove que Bob vence o jogo NIM-MISÈRE para instâncias (n, n) (recordar que Alice começa) se e só se $n \geq 2$.

Exercício 1.3. Quem vence a variante misère do jogo NIM-PARTIZAN nas instâncias da Figura 1.7? Alice ou Bob? Construa a árvore de jogo, mostrando a numeração do algoritmo que decide o vencedor.

Exercício 1.4. Prove que Alice e Bob não tem estratégia vencedora em TICTACTOE. Prove também que Alice possui uma estratégia vencedora na variante MAKER-BREAKER do TICTACTOE.

Exercício 1.5. Qual jogador vence na variante misère do jogo TICTACTOE-IMPARCIAL 3x3? E nas variantes normal e misère 4x4?

2

Teoria de Sprague-Grundy de Jogos Imparciais

“The game here discussed has interested the writer on account of its seeming complexity, and its extremely simple and complete mathematical theory.”

Charles Bouton, 1901, sobre o NIM

“E. Lasker said that the positions fall into two classes, winning or losing, but this classification is not sufficient. The task of determining the character of a game is solved with a precise classification of positions, which will now be developed.”

R. Sprague, 1936, sobre Lasker, campeão mundial de xadrez

Este capítulo é dedicado a apresentar a Teoria de Sprague-Grundy dos anos 1930, que é uma teoria muito forte para determinar o vencedor de jogos imparciais na variante normal. Existem extensões desta teoria para jogos imparciais na variante *misère*, mas que fogem do escopo deste livro. Em ambas as variantes, o jogo NIM, definido no Capítulo 1, tem crucial importância. Como dito no Capítulo 1, o jogo NIM foi resolvido matematicamente por Bouton (1901). No entanto, só nos anos 1930, Sprague (1936) e Grundy (1939) conseguiram classificar corretamente posições de jogos imparciais na variante normal, e não somente como vencedoras ou perdedoras para o 1º jogador, como defendido por Emanuel Lasker (1931), segundo campeão mundial de xadrez, que manteve o título por mais tempo, por 27 anos, de 1894 a 1921. A classificação que eles conseguiram para as posições de jogos imparciais na variante normal se baseou em posições de 1 pilha do jogo NIM, que serão chamadas de *numbers*.

2.1 Jogo NIM

NIM é um dos jogos imparciais mais importantes. Nesse jogo, existem k pilhas de objetos em que a i -ésima pilha possui n_i objetos, para $i = 1, \dots, k$. Alice e Bob se alternam no jogo fazendo jogadas, em que cada jogada consiste em escolher uma pilha e remover qualquer quantidade de objetos da pilha escolhida. Esse jogo segue a convenção de jogo normal (variante normal) em que o último a jogar vence. Ou seja, vence quem remover o último objeto das pilhas.

Uma instância de NIM é então dada por uma sequência $(n_1, \dots, n_k)$ em que podemos assumir (reorganizando as pilhas) que $n_1 \geq \dots \geq n_k \geq 0$. NIM tem um papel fundamental da Teoria de Sprague-Grundy e foi resolvido matematicamente por Bouton (1901) para qualquer instância. Em outras palavras, o problema de decidir o vencedor de NIM pode ser resolvido em tempo polinomial. Bouton (1901) não resolveu apenas o jogo NIM (variante normal), mas também o jogo NIM MISÈRE.

NIM com 2 pilhas iguais As Figuras 1.3 e 1.4 mostram que Bob (segundo jogador) vence nas instâncias $(2, 2)$ e $(3, 3)$ tanto na variante normal como misère. Os Exercícios 1.1 e 1.2 pedem para provar que Bob sempre vence em instâncias (n, n) nas variantes normal e misère para $n \geq 2$.

A elegante solução de Bouton (1901)

A solução de Bouton (1901) está relacionada a operação $\oplus$ (ou-exclusivo bit a bit), que é a operação comutativa e associativa entre bits com a seguinte tabela verdade: $0 \oplus 0 = 0$, $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$ e $1 \oplus 1 = 0$. Na operação $\oplus$ entre números naturais, considera-se cada número em notação binária e aplica-se a operação $\oplus$ bit a bit, obtendo um novo número. Por exemplo, $1 \oplus 2 = 01_2 \oplus 10_2 = 11_2 = 3$, onde o número 2 em subscripto indica a notação binária dos números. Além disso, $2 \oplus 3 = 10_2 \oplus 11_2 = 01_2 = 1$ e $1 \oplus 3 = 01_2 \oplus 11_2 = 10_2 = 2$. Note, por exemplo, que $n \oplus 0 = n$ para todo número natural n . Com isso define-se o *nimber* (ou valor) de uma instância $(n_1, \dots, n_k)$ do jogo NIM como $\text{nim}(n_1, \dots, n_k) = n_1 \oplus \dots \oplus n_k$.

Teorema 2.1 (Bouton 1901). *Seja $(n_1, \dots, n_k)$ uma instância de NIM. Alice vence NIM (variante normal) se e só se $\text{nim}(n_1, \dots, n_k) > 0$. Além disso, Alice vence NIM MISÈRE se e só se $\text{nim}(n_1, \dots, n_k) > 0$ e existe pelo menos uma pilha com mais de 1 objeto, ou $\text{nim}(n_1, \dots, n_k) = 0$ e toda pilha não vazia tem exatamente 1 objeto.*

Bouton (1901) mostrou que a estratégia vencedora em ambas as variantes normal e misère é terminar cada jogada com *valor* (nimber) igual a 0, exceto na variante misère quando toda pilha não vazia tem exatamente 1 objeto. Para isso, mostrou-se que, quando o valor (nimber) de uma instância é igual 0, qualquer jogada nela obtém um valor diferente de 0. Além disso, quando o valor de uma instância é diferente de 0, sempre existe uma jogada que obtém um valor igual a 0.

Por exemplo, $\text{nim}(3, 2, 1) = 0$ e as possíveis jogadas nessa instância levam às instâncias $(3, 2, 0)$, $(3, 1, 1)$, $(3, 1, 0)$, $(2, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$ e $(2, 1, 0)$, com nimbers 1, 3, 2, 1, 2, 3, respectivamente, todas diferentes de 0. Além disso, para cada uma dessas novas instâncias, é possível jogar obtendo uma instância com nimber igual a 0, a saber, $(2, 2, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(2, 2, 0)$, $(1, 1, 0)$ e $(1, 1, 0)$.

Continuando o exemplo sobre a instância $(3, 2, 1)$, se Alice joga e obtém $(2, 2, 1)$, Bob joga obtendo $(2, 2, 0)$. Se Alice joga obtendo $(2, 1, 0)$, Bob joga obtendo $(1, 1, 0)$ na variante normal ou $(1, 0, 0)$ na variante misère, vencendo ambas as variantes em breve.

Prova do Teorema de Bouton de 1901

A seguir provamos o Teorema 2.1 de Bouton (1901).

Demonstração. Primeiro, considere a variante normal. Como vale para uma pilha, seja $k > 1$. Seja $(n_1, \dots, n_k)$ uma instância de NIM com nimber $N = \text{nim}(n_1, \dots, n_k) = n_1 \oplus \dots \oplus n_k$. Se $n_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq k$, então $N = 0$ e o primeiro jogador perde o jogo. Então, considere que há uma pilha não vazia. A prova consiste em mostrar que: se $N = 0$, qualquer jogada leva a um jogo $(n'_1, \dots, n'_k)$ com nimber $N' > 0$ e, por outro lado, se $N > 0$, há uma jogada que leva a um jogo $(n'_1, \dots, n'_k)$ com nimber $N' = 0$. Como a soma $S = \sum_{i=1}^k n_i$ é estritamente decrescente (e positiva) a cada jogada, isso prova o resultado por indução em S .

Seja i tal que a primeira jogada é na i -ésima pilha, e seja $n'_i < n_i$ seu novo tamanho e N' o novo nimber total. Observe que $N' = N \oplus n_i \oplus n'_i$ (lembre que $\oplus$ é comutativo e associativo). Portanto, se $N = 0$, então $N' = 0 \oplus n_i \oplus n'_i \neq 0$, pois $n_i \neq n'_i$.

Assim, suponha que $N > 0$ e seja $b \geq 0$ o maior inteiro tal que o b -ésimo bit de N (em sua representação binária) é 1, ou seja, b é a posição do bit mais significativo de N . Se o b -ésimo bit de cada n_i for 0, então o b -ésimo

bit de N seria 0, uma contradição. Portanto, seja i tal que o b -ésimo bit de n_i é 1. Seja $n'_i = n_i \oplus N$ e observe que $n'_i < n_i$, já que o b' -ésimo bit de n_i e n'_i são iguais para $b' > b$ (pois o b' -ésimo bit de N é 0), e o b -ésimo bit de n'_i também é 0 (já que os b -ésimos bits de n_i e N são 1). Assim, o primeiro jogador pode fazer um movimento, deixando a i -ésima pilha com $n'_i < n_i$ objetos. Finalmente, observe que $N' = N \oplus n_i \oplus n'_i = N \oplus n_i \oplus (n_i \oplus N) = 0$.

Agora considere a variante *misère*. A diferença para a variante normal é quando há apenas uma pilha h com mais de 1 objeto, e é a vez do jogador com estratégia vencedora (na variante normal). A estratégia para a variante normal é deixar h com 0 ou 1 objeto de tal forma que o número de pilhas não vazias (todas com tamanho 1) seja par (e então o *nimber* total seja 0). Na estratégia vencedora *misère*, o jogador vencedor deve fazer o oposto, deixando h com 0 ou 1 objeto de tal forma que o número de pilhas não vazias (todas com tamanho 1) seja ímpar. Depois disso, como todas as pilhas não vazias têm tamanho 1 e há um número ímpar de pilhas, cada movimento esvazia uma pilha e o jogador com estratégia vencedora (na variante normal) também vence a variante *misère*. ■

2.2 Teorema de Sprague-Grundy

A Teoria de Sprague-Grundy para jogos imparciais na variante normal, desenvolvida independentemente por Sprague (1936) e Grundy (1939), afirma que é possível associar um número natural (chamado *nimber*) a toda posição finita de um jogo imparcial, associando-a a um jogo NIM de apenas uma pilha com aquela quantidade de objetos.

Formalmente, define-se recursivamente o *nimber* de uma posição de um jogo imparcial finito como um número natural associado da seguinte forma. Se não há jogadas possíveis (e portanto o primeiro jogador perde), então a posição tem *nimber* 0. Caso contrário, o *nimber* é o *mínimo excludente* $\text{mex}\{n_1, \dots, n_k\}$, onde $\{n_1, \dots, n_k\}$ é o conjunto de todos os *nimbers* das posições que podem ser obtidas após uma jogada e o *mínimo excludente* mex é o mínimo número natural não pertencente ao conjunto.

Por exemplo, se após um movimento em um jogo imparcial podem ser obtidas posições com *nimbers* 0, 1, 4 ou 5, então o *nimber* desta posição é $\text{mex}\{0, 1, 4, 5\} = 2$.

Note que uma posição (n) de NIM com apenas uma pilha com n elementos pode levar após uma jogada a qualquer posição (k) para $k = 0, \dots, n-1$.

Portanto, como esperado dessa associação com pilhas de NIM e pela própria definição de mex, após uma jogada em uma posição com nimber $n > 0$ de um jogo imparcial qualquer, é possível obter uma posição para cada nimber em $\{0, 1, \dots, n - 1\}$.

Para enunciar o Teorema de Sprague-Grundy, precisamos da definição de soma de jogos. Dadas posições disjuntas $J_1, \dots, J_k$ de jogos na variante normal, a *soma* $J_1 + \dots + J_k$ é o jogo em que cada jogador, ao fazer seu movimento, escolhe uma das k posições (digamos J_i) e faz uma jogada em J_i . É fácil ver que a soma de jogos é comutativa e associativa.

Teorema 2.2 (Sprague 1936 e Grundy 1939). *O 1º jogador vence uma posição de um jogo imparcial na variante normal se e só se ela tem nimber maior que 0. Além disso, uma posição que consiste da soma de k posições disjuntas com nimbers $n_1, \dots, n_k$ tem nimber $n_1 \oplus \dots \oplus n_k$.*

Intuição do Teorema de Sprague-Grundy: Seja NIM-BOLSAS o jogo em que há sobre uma mesa pilhas do jogo NIM e também bolsas, cada uma contendo pilhas do jogo NIM. Ao se escolher uma bolsa, o jogador deve escolher uma das pilhas da bolsa e colocá-la sobre a mesa, descartando completamente a bolsa (junto com as demais pilhas da bolsa). Ao se escolher uma pilha, o jogador deve proceder como no jogo NIM, removendo alguns de seus objetos. Por exemplo, se o jogo consiste de apenas uma bolsa X , a qual contém apenas uma pilha de tamanho 0, Alice seleciona a única bolsa e sua única pilha e vence, pois Bob não tem jogadas na pilha de tamanho 0. Isso significa que o nimber $\text{nim}(X) = \text{mex}\{0\} = 1$. Suponha agora que o jogo consiste de 3 bolsas X , Y e Z , cada uma com 4 pilhas do jogo NIM. Na bolsa X , há pilhas com tamanhos 0, 2, 3 e 4. Na bolsa Y , há pilhas com tamanhos 0, 1, 3 e 4. Na bolsa Z , há pilhas com tamanhos 0, 1, 2 e 4. Portanto, $\text{nim}(X) = \text{mex}\{0, 2, 3, 4\} = 1$, $\text{nim}(Y) = \text{mex}\{0, 1, 3, 4\} = 2$ e $\text{nim}(Z) = \text{mex}\{0, 1, 2, 4\} = 3$. Logo $\text{nim}(X + Y + Z) = 1 \oplus 2 \oplus 3 = 0$ e assim Bob vence pelo Teorema de Sprague-Grundy. Porque? Vamos passar uma intuição para isso. O jogador com estratégia vencedora pode sempre manter o nimber total do jogo igual a 0 após sua jogada. Se Alice escolher na primeira jogada uma pilha de tamanho 2, 3 ou 4 de X , Bob pode jogar nessa pilha deixando-a com tamanho 1 (mantendo o nimber de X com seu valor anterior 1). Se Alice escolher na primeira jogada uma pilha de tamanho 3 ou 4 de Y , Bob pode jogar nessa pilha deixando-a com tamanho 2 (mantendo o nimber de Y com seu valor anterior 2). Se Alice escolher na primeira jogada a pilha de tamanho 4 de Z , Bob pode jogar

nessa pilha deixando-a com tamanho 3 (mantendo o nimber de Z com seu valor anterior 3). Em todos esses casos, o nimber total se mantém 0 e Bob vence. Nos demais casos, o jogo procede de modo semelhante a NIM.

A próxima seção apresenta um exemplo ilustrativo para ajudar na compreensão e aplicação desse teorema tão importante. Esse teorema também é importante em outras seções do livro, como na Seção 8.3 em que se calcula os nimbers do Jogo Normal de Dominação aplicado a grafos caminho P_n e grafos ciclos C_n e na Seção 6.2 em que se calcula os nimbers do Jogo CIG_g aplicado a árvores.

2.3 Aplicação: Nimbers do jogo KAYLES

O jogo KAYLES¹ foi definido no Capítulo 1. Resumidamente, Alice e Bob se alternam selecionando vértices que devem sempre formar um conjunto independente. Considere aqui a convenção de jogo normal (perde quem não tiver movimentos).

Jogo KAYLES em caminhos P_n e ciclos C_n

Sobre nomenclatura de grafos, como grafo completo K_n , caminho P_n ou ciclo C_n , recomendamos o Capítulo A. É fácil ver que todo grafo completo K_n tem nimber 1, pois qualquer jogada encerra o jogo (nimber 0), ou seja, $\text{mex}\{0\} = 1$. Além disso, o caminho P_3 tem nimber 2, pois obtém-se nimber 0 jogando no vértice do meio e obtém-se nimber 1 jogando em qualquer extremidade, ou seja, $\text{mex}\{0, 1\} = 2$. O caminho P_4 tem nimber 0 (o primeiro a jogar perde), pois obtém-se nimber 1 jogando em qualquer vértice, ou seja, $\text{mex}\{1\} = 0$. Finalmente, o caminho P_5 tem nimber 3 (Exercício 2.2), pois obtém-se nimber 0 jogando no vértice central, nimber 1 jogando em qualquer vizinho do vértice central e nimber 2 em qualquer das extremidades, ou seja, $\text{mex}\{0, 1, 2\} = 3$. Com isso, é possível determinar o vencedor do jogo KAYLES na união disjunta dos grafos P_2 , P_3 , P_4 e P_5 , calculando o nimber $1 \oplus 2 \oplus 0 \oplus 3 = 0$ e consequentemente Alice (primeira jogadora) perde.

¹ O nome *Kayles* é uma versão inglesa do termo francês *Quilles*, que se refere a uma variante europeia antiga do jogo de boliche, jogado na grama. A ideia é que, ao se *derrubar* um vértices no boliche, seus vizinhos também são derrubados.

Considere agora o grafo P_n para $n > 5$ e sejam $v_1, \dots, v_n$ seus vértices. Note que a jogada em v_1 obtém P_{n-2} (pois v_1 e v_2 não podem mais ser selecionados) e a jogada em v_2 obtém P_{n-3} (pois v_1, v_2 e v_3 não podem mais ser selecionados). Análogo para v_n e v_{n-1} . Além disso, a jogada em v_k para $3 \leq k \leq n-2$ obtém a união disjunta dos grafos P_{k-2} e P_{n-k-1} , pois v_{k-1}, v_k e v_{k+1} não podem mais ser selecionados. Portanto,

$$\text{nim}(P_n) = \text{mex} \left\{ \text{nim}(P_{n-2}), \text{nim}(P_{n-3}), \right. \\ \left. \text{nim}(P_{k-2}) \oplus \text{nim}(P_{n-k-1}) : k = 3, \dots, \lceil n/2 \rceil \right\}$$

Com esta recursividade, é possível obter um algoritmo de programação dinâmica simples que determina a sequência de nimbers do jogo KAYLES no caminho P_n (Exercício 2.3). Verifica-se assim que esta é uma sequência periódica para $n \geq 68$ com período igual a 34 (Tabela 2.1).

Tabela 2.1: Nimbers do jogo KAYLES sobre o grafo caminho P_n . A 1ª linha indica o resto da divisão de n por 34. A 2ª linha indica os nimbers de 0 a 33. A 3ª linha de 34 a 67 e assim por diante. A sequência é periódica para $n \geq 68$ (penúltima linha) e o período é 34.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
0-33	0	1	1	2	0	3	1	1	0	3	3	2	2	4	0	5	2	2	3	3	0	1	1	3	0	2	1	1	0	4	5	2	7	4
34-67	0	1	1	2	0	3	1	1	0	3	3	2	2	4	4	5	5	2	3	3	0	1	1	3	0	2	1	1	0	4	5	3	7	4
68-101	8	1	1	2	0	3	1	1	0	3	3	2	2	4	4	5	5	9	3	3	0	1	1	3	0	2	1	1	0	4	5	3	7	4
102-135	8	1	1	2	0	3	1	1	0	3	3	2	2	4	4	5	5	9	3	3	0	1	1	3	0	2	1	1	0	4	5	3	7	4

A análise desta sequência também leva a seguinte conclusão:

Teorema 2.3. *Bob vence KAYLES no grafo caminho P_n se e só se $n \in \{0, 14, 34\}$ ou $n\%34 \in \{4, 8, 20, 24, 28\}$, onde $\%$ é a operação de resto.*

Para finalizar, note que o jogo KAYLES em um grafo ciclo C_n leva após a primeira jogada a um grafo caminho P_{n-3} . Portanto, $\text{nim}(C_n) = \text{mex}\{\text{nim}(P_{n-3})\}$, que é positivo se e só se $\text{nim}(P_{n-3}) = 0$. Ou seja,

Corolário 2.4. *Alice vence KAYLES no grafo ciclo C_n se e só se $n \in \{3, 17, 37\}$ ou $n\%34 \in \{7, 11, 23, 27, 31\}$, onde $\%$ é a operação de resto.*

Jogo KAYLES original de Dudeney de 1907

Dudeney (1907) definiu o jogo KAYLES aplicado a um jogo de boliche em que uma jogada pode derrubar apenas 1 pino ou 2 pinos vizinhos.

Traduzindo isso para um grafo no jogo KAYLES, seja B_n o grafo boliche com vértices $v_1, \dots, v_n$ (representando os n pinos de boliche) e vértices $x_1, \dots, x_{n-1}$ (representando pares de pinos vizinhos) e com arestas $v_i x_i$ e $v_{i+1} x_i$ para $1 \leq i < n$ e arestas $x_j x_{j+1}$ para $1 \leq j < n-1$. Ver Figura 2.1.

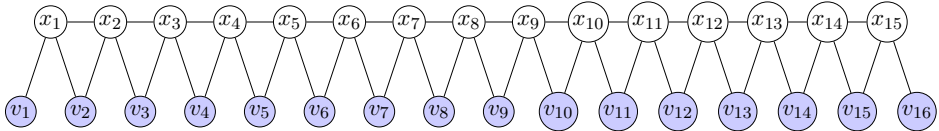


Figura 2.1: Grafo boliche B_n com $n = 16$. Os pinos do boliche são os vértices $v_1, v_2, \dots, v_n$ em azul. Alice vence para todo $n \geq 1$.

Vamos mostrar a solução de Guy e Smith (1956) do jogo KAYLES em grafos boliche B_n . Note que B_1 é o grafo P_1 e B_2 é o grafo P_3 . Vamos então assumir que $n \geq 3$. Note que a jogada em v_1 obtém o grafo boliche B_{n-1} (pois v_1 e x_1 não poderão mais ser selecionados) e que a jogada em x_1 obtém o grafo B_{n-2} (pois v_1, v_2, x_1 e x_2 não poderão mais ser selecionados). Análogo para v_n e x_{n-1} . Além disso, a jogada em v_k para $2 \leq k \leq n-1$ obtém a união disjunta dos grafos boliche B_{k-1} e B_{n-k} , pois v_k, x_{k-1} e x_k não poderão mais ser selecionados. Finalmente, a jogada em x_k para $2 \leq k \leq n-2$ obtém a união disjunta dos grafos B_{k-1} e B_{n-k-1} , pois $v_k, v_{k+1}, x_{k-1}, x_k$ e x_{k+1} não poderão mais ser selecionados. Portanto,

$$\begin{aligned} \text{nim}(B_n) = \text{mex} \Big\{ & \text{nim}(B_{n-1}), \text{nim}(B_{n-2}), \\ & \text{nim}(B_{k-1}) \oplus \text{nim}(B_{n-k}), \\ & \text{nim}(B_{k-1}) \oplus \text{nim}(B_{n-k-1}) : k = 2, \dots, \lceil n/2 \rceil \Big\} \end{aligned}$$

Com esta recursividade, é possível obter um algoritmo de programação dinâmica que determina a sequência de nimbers do jogo KAYLES sobre qualquer grafo boliche B_n (Exercício 2.4). Verifica-se assim que esta é uma sequência periódica para $n \geq 72$ com período igual a 12 (Tabela 2.2).

Através dos nimbers da Tabela 2.2, podemos concluir que Alice perde na união disjunta de B_{12k+5} , B_{12k+6} , B_{12k+7} e B_{12k+8} para $k \geq 2$, pois o nimber total é igual a $4 \oplus 7 \oplus 2 \oplus 1 = 0$. Finalmente, note também que não há nimber 0 na Tabela 2.2 para $n > 0$ e portanto Alice sempre vence.

Tabela 2.2: Nimbers do jogo KAYLES sobre grafos boliche B_n . A 1ª linha indica o resto da divisão de n por 12. A 2ª linha indica os nimbers de 0 a 11. A 3ª linha de 12 a 23 e assim por diante. A sequência é periódica para $n \geq 72$ (penúltima linha) e o período é 12.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0-11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12-23	4	1	2	7	1	4	3	2	1	4	6	7
24-35	4	1	2	8	5	4	7	2	1	8	6	7
36-47	4	1	2	3	1	4	7	2	1	8	2	7
48-59	4	1	2	8	1	4	7	2	1	4	2	7
60-71	4	1	2	8	1	4	7	2	1	8	6	7
72-83	4	1	2	8	1	4	7	2	1	8	2	7
84-95	4	1	2	8	1	4	7	2	1	8	2	7

Teorema 2.5 (Guy e Smith 1956). *Alice vence KAYLES no grafo boliche B_n para todo $n \geq 1$.*

Para finalizar esta subseção, considere agora que os pinos de boliche formam um círculo. Definimos assim o *grafo boliche circular* B_n^* ilustrado na Figura 2.2. Note que o jogo KAYLES no grafo boliche circular B_n^* com $n \geq 3$ leva após a primeira jogada a um grafo boliche B_{n-1} ou B_{n-2} , que tem nimbers positivos. Portanto, $\text{nim}(B_n^*) = \text{mex}\{\text{nim}(B_{n-1}), \text{nim}(B_{n-2})\} = 0$.

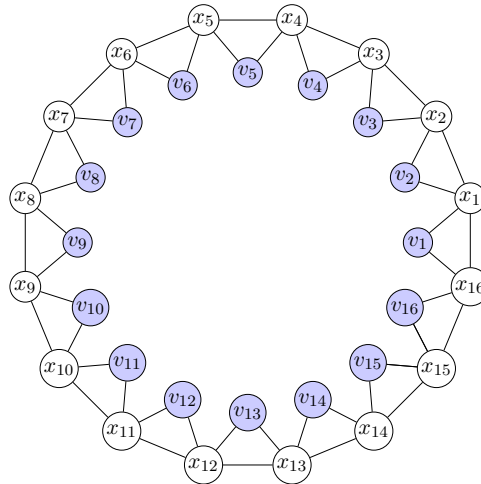


Figura 2.2: Grafo boliche circular B_n^* com $n = 16$. Os pinos do boliche são os vértices $v_1, v_2, \dots, v_n$ em azul. Bob vence para todo $n \geq 3$.

Consequentemente:

Corolário 2.6. *Bob vence KAYLES no grafo boliche circular B_n^* para todo $n \geq 3$.*

2.4 Exercícios

Exercício 2.1. Prove sem usar o Teorema de Sprague-Grundy que Bob realmente vence o jogo NIM-BOLSAS da Seção 2.2 com três bolsas X , Y e Z em que a bolsa X tem pilhas com tamanhos 0, 2, 3, 4, a bolsa Y tem pilhas com tamanhos 0, 1, 3, 4 e a bolsa Z tem pilhas com tamanhos 0, 1, 2, 4.

Exercício 2.2. Prove que os caminhos P_1 , P_2 , P_3 , P_4 e P_5 tem nimbers 1, 1, 2, 0 e 3 no jogo KAYLES, respectivamente.

Exercício 2.3. Escreva um algoritmo para determinar todos os nimbers do jogo KAYLES para o grafo caminho P_n para qualquer n de 0 a 100.

Exercício 2.4. Escreva um algoritmo para determinar todos os nimbers do jogo KAYLES para o grafo boliche B_n para qualquer n de 0 a 100.

Exercício 2.5. Seja o grafo *caterpillar* Cat_n formado por um caminho P_n $v_1, \dots, v_n$, adicionando vértices $f_1, \dots, f_n$ e arestas $f_i v_i$ para $i = 1, \dots, n$. Prove por indução que $\text{nim}(Cat_n) = n \% 2$ no jogo KAYLES e portanto Alice vence em Cat_n se e só se n é ímpar.

Exercício 2.6. Considere um jogo de boliche em que os pinos numerados de 1 a n estão em fila e, em cada jogada, derruba-se um pino ou derruba-se um pino e seus vizinhos imediatos. Prove por indução que o nimber para n pinos é $n \% 4$ e portanto Bob vence a variante normal desse jogo se e só se n é múltiplo de 4.

3

Combinatória Extremal para Jogos

“Any attempt to analyze unsolved games leads to the same conclusion: we get quickly lost in millions and millions of cases, and feel shipwrecked in the middle of the ocean. Is it really hopeless to escape from Combinatorial Chaos?”

József Beck, 2008

Nos Capítulos 2 e 10, mostramos como decidir o vencedor de alguns jogos imparciais ou partizan, usando a Teoria de Sprague-Grundy e a Teoria Combinatória dos Jogos, levando em alguns casos a algoritmos polinomiais ou obtendo a solução para instâncias pequenas.

Neste capítulo, mostraremos alguns resultados clássicos de Combinatória Extremal para jogos, o que leva a decidir exatamente o vencedor para instâncias muito grandes em alguns casos. Por exemplo, considere novamente o Jogo CLIQUE (n, k) em que, dado n , desejamos saber o tamanho k da maior clique do grafo completo K_n que Alice consegue colorir (em arestas). Veremos que, para $n = 2^{(33+10^{10})}$, esse valor é exatamente $k = 2 \cdot 10^{10} - 1$. Ou seja, Alice não consegue colorir as arestas de uma clique com 20 bilhões de vértices, mas consegue com qualquer número menor. É surpreendente que esse problema seja tão difícil para instâncias pequenas, mas é possível calcular o valor exato para instâncias tão grandes.

Uma das principais técnicas usadas aqui é a Técnica do Potencial. Em 1961, Conway aplicou esta técnica com sucesso para obter uma belíssima solução de um puzzle (jogo de 1 jogador), que é agora bem conhecido por Soldados de Conway, que será mostrado na Seção 3.1. Erdős e Selfridge (1973) foram os primeiros a usar esta técnica para jogos combinatórios, obtendo seu famoso teorema sobre condições de vitória para Bob em jogos MAKER-BREAKER, mostrado na Seção 3.2. Na Seção 3.3, também veremos condições de vitória para Alice em jogos MAKER-BREAKER e condições de

vitória para Alice e Bob em jogos MAKER-BREAKER tendenciosos a partir de três teoremas de Beck (1981a). Esses teoremas têm consequências importantes para o Jogo da Velha n^d , que será mostrado na Seção 3.4, juntamente com o Teorema de Hales e Jewett (1963). Na Seção 3.5, mostramos aplicações desses teoremas para obter resultados extremas sobre outro jogo posicional interessante, o JOGO DA P.A. (ou de van der Waerden). Finalmente, na Seção 3.6, mostramos o potente Teorema de Beck para o Jogo da CLIQUE (ou de Ramsey), mencionado no parágrafo anterior. Para maior aprofundamento nesse tópico, indicamos o excelente livro “*Combinatorial games Tic-Tac-Toe Theory*” de József Beck (2008).

3.1 Técnica do Potencial e os Soldados de Conway

A *Técnica do Potencial* busca por uma função que retorna um valor numérico (o potencial) para qualquer instância de certo jogo de modo que as instâncias que podem ser obtidas a partir de um movimento válido do jogo mantenham o potencial ou diminuam de um modo controlado (nunca aumentando), assim como a energia mecânica de um sistema físico.

Uma das aplicações mais conhecidas dessa técnica é o problema dos Soldados de Conway, explicado a seguir. Outras aplicações serão vistas nas Seções 3.2 e 3.3 em teoremas sobre jogos MAKER-BREAKER e na Seção 8.2 na prova do Teorema $\frac{2}{3}$ sobre o Jogo de Dominação.

No problema dos Soldados de Conway, há um tabuleiro infinito bidimensional com uma linha horizontal acima da qual todas as células estão vazias. Abaixo dessa linha, pode haver células não vazias, contendo um soldado. Um movimento consiste em um soldado qualquer s_1 pular sobre um soldado vizinho s_2 (horizontal ou vertical) para uma célula vazia, removendo s_2 . O objetivo do jogo é colocar um soldado o mais longe possível acima da linha. A Figura 3.1 mostra as soluções para distância 1, 2, 3 e 4.

Conway (1961) usou a Técnica do Potencial para obter uma prova bastante elegante da impossibilidade de se alcançar a distância 5.

Teorema 3.1 (Conway (1961)). *Não existe sequência finita de movimentos que leve um soldado até uma distância 5 ou mais acima da linha horizontal.*

Demonstração. O potencial de uma posição será a soma dos pesos de todas as células que contém um soldado, em que a função peso $p(\cdot)$ é tal que, se células c_1 , c_2 e c_3 são consecutivas em uma linha ou coluna, então $p(c_1) +$

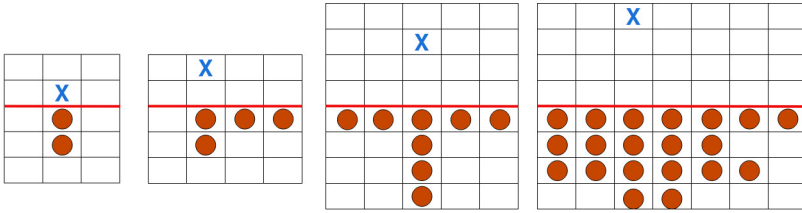


Figura 3.1: Solução dos Soldados de Conway para distâncias 1, 2, 3 e 4.

$p(c_2) \geq p(c_3)$. Isso significa que nenhum movimento implicará em aumento de potencial, pois um soldado em c_1 pulando sobre outro em c_2 e parando em c_3 leva a uma perda de potencial igual a $p(c_1) + p(c_2) - p(c_3) \geq 0$.

Seja $\varphi = (\sqrt{5} - 1)/2$, ou seja, $\varphi^2 + \varphi = 1$. Fixe uma célula alvo à distância 5 acima da linha horizontal. Seja o peso de uma célula igual a φ^d , em que d é a distância retilínea (distância L^1 ou de Manhattan) para a célula alvo (considerando apenas segmentos horizontais e/ou verticais). Logo o peso da célula alvo é $\varphi^0 = 1$. Note que o pulo de um soldado de uma célula à distância $d + 2$ para uma célula à distância d não muda o potencial, pois $\varphi^{d+2} + \varphi^{d+1} = \varphi^d$. É fácil ver que pulos que não se aproximam da célula alvo diminuem o potencial. Vamos calcular o maior potencial possível, colocando um soldado em cada célula abaixo da linha. Na linha 1 abaixo da linha central, temos potencial

$$\varphi^5 + 2\varphi^6 + 2\varphi^7 + \dots = \varphi^5 + 2\frac{\varphi^6}{1 - \varphi} = \varphi^5 + 2\frac{\varphi^6}{\varphi^2} = \varphi^5 + 2\varphi^4 = \varphi^3 + \varphi^4 = \varphi^2$$

Analogamente, toda linha i abaixo da linha central tem potencial φ^{i+1} . Somando os potenciais de cada linha, o potencial total máximo é igual a

$$\varphi^2 + \varphi^3 + \varphi^4 + \dots = \frac{\varphi^2}{1 - \varphi} = \frac{\varphi^2}{\varphi^2} = 1,$$

mesmo potencial da célula alvo, desejada no final. Portanto, nenhum número finito de soldados é capaz de colocar um soldado à distância 5 ou mais acima da linha central. ■

Provou-se posteriormente que um número infinito de soldados consegue alcançar a quinta fileira (S. Tatham s.d.). Ademais, se é possível pular nas diagonais, então é possível alcançar até a oitava fileira, mas não a nona (Bell, Hirschberg e Guerrero-García 2007).

3.2 Teorema de Erdős-Selfridge para Maker-Breaker

A Técnica do Potencial mostrada na seção anterior para um jogo de 1 jogador (puzzle) foi aplicada pela primeira vez em um jogo de 2 jogadores no teorema abaixo que fornece condições de vitória para Bob. Lembre que, num jogo MAKER-BREAKER, há um conjunto universo $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ e uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de U . Alice e Bob pegam elementos de U alternadamente de modo que Alice (como Maker) vence se conseguir algum conjunto de $\mathcal{F}$ e Bob (como Breaker) vence, caso contrário. Dizemos que $\mathcal{F}$ é k -uniforme se $|F| = k$ para todo $F \in \mathcal{F}$.

Teorema 3.2 (Erdős e Selfridge 1973). *Seja $(U, \mathcal{F})$ uma instância do jogo MAKER-BREAKER. Se Bob (Breaker) joga primeiro, então ele vence se $\sum_{F \in \mathcal{F}} 2^{-|F|} < 1$. Caso contrário, ele vence se*

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} 2^{-|F|} < 1 - \max_{u \in U} \left\{ \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}: \\ u \in F}} 2^{-|F|} \right\}$$

e portanto se $\sum_{F \in \mathcal{F}} 2^{-|F|} < \frac{1}{2}$. Consequentemente, quando $\mathcal{F}$ é k -uniforme, Bob vence sempre que $|\mathcal{F}| < 2^k$ se Bob joga primeiro ou, caso contrário, sempre que $|\mathcal{F}| < 2^{k-1}$ ou $|\mathcal{F}| + \Delta_1(\mathcal{F}) < 2^k$, onde $\Delta_1(\mathcal{F}) = \max_{u \in U} d(u)$ e $d(u)$ é o número de conjuntos $F \in \mathcal{F}$ que contém u .

Demonstração. Aplicando a Técnica do Potencial, vamos definir o potencial de um conjunto vencedor $F \in \mathcal{F}$ como sendo $2^{-|F|}$, ou seja, a probabilidade de Alice (como Maker) conseguir todos os elementos de F caso o jogo fosse jogado aleatoriamente (assumindo que cada elemento tem probabilidade $1/2$ de ser escolhido por Alice ou por Bob). O potencial P_0 da instância de MAKER-BREAKER é a soma dos potenciais de seus conjuntos, ou seja, $P_0 = \sum_{F \in \mathcal{F}} 2^{-|F|}$, que representa o número esperado de conjuntos $F \in \mathcal{F}$ conquistados por Alice.

Suponha inicialmente que Bob começa o jogo, selecionando x , e, em seguida, Alice seleciona y . Quando Bob escolhe x , a instância se altera eliminando de $\mathcal{F}$ todo conjunto F que contém x . Isso porque conjuntos que contém elementos escolhidos por Bob estão *mortos* para Alice, ou seja, não podem mais ser conquistados por ela. Quando Alice seleciona y , a instância se altera de modo que y é removido de todo conjunto F que contém y . Isso porque, em tais conjuntos alterados, basta se preocupar com os elementos

ainda não conquistados. Note que, nesse caso, o potencial de F é dobrado de $2^{-|F|}$ para $2^{-(|F|-1)}$, uma variação de $2^{-|F|}$.

Para $i \in \{1, 2\}$, sejam $\mathcal{F}_i$ e P_i a instância e seu potencial logo após o movimento do turno i (Bob para i ímpar e Alice para i par). Seja $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$. Desse modo, após a escolha de x por Bob e depois y por Alice, os potenciais P_1 e P_2 se tornam

$$P_1 = P_0 - \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}_0: \\ x \in F}} 2^{-|F|} \quad \text{e}$$

$$P_2 = P_1 + \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}_1: \\ y \in F}} 2^{-|F|} = P_0 - \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}_0: \\ x \in F}} 2^{-|F|} + \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}_1: \\ y \in F}} 2^{-|F|}$$

Tomando x tal que

$$\sum_{\substack{F \in \mathcal{F}_0: \\ x \in F}} 2^{-|F|}$$

é máximo, temos que

$$P_2 \leq P_0 - \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}_0: \\ x \in F}} 2^{-|F|} + \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}_0: \\ y \in F}} 2^{-|F|} \leq P_0 - \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}_0: \\ x \in F}} 2^{-|F|} + \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}_0: \\ x \in F}} 2^{-|F|} = P_0.$$

Ou seja, $P_1 \leq P_0$ e $P_2 \leq P_0$. Se Alice consegue um conjunto vencedor $F \in \mathcal{F}_0$ em algum turno i do jogo, então $\mathcal{F}_i$ contém um conjunto $F_i = \emptyset$, obtido do conjunto F original e portanto o potencial P_i de $\mathcal{F}_i$ é pelo menos $2^{-|F_i|} = 2^0 = 1$. Portanto, se $P_0 < 1$, é impossível para Alice obter um conjunto vencedor.

Considere agora que Alice é a primeira jogar. No máximo, ela consegue aumentar o potencial da instância no valor

$$\max_{u \in U} \left\{ \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}: \\ u \in F}} \left(2^{-(|F|-1)} - 2^{-|F|} \right) \right\} = \max_{u \in U} \left\{ \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}: \\ u \in F}} 2^{-|F|} \right\}.$$

Portanto, se

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} 2^{-|F|} + \max_{u \in U} \left\{ \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}: \\ u \in F}} 2^{-|F|} \right\} < 1,$$

então voltamos a situação analisada antes em que Bob é o primeiro jogar a partir daí, vencendo o jogo. Finalmente, note que

$$\max_{u \in U} \left\{ \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}: \\ u \in F}} 2^{-|F|} \right\} \leq \sum_{F \in \mathcal{F}} 2^{-|F|}$$

e portanto Bob vence se $\sum_{F \in \mathcal{F}} 2^{-|F|} < 1/2$. ■

Os valores desse teorema são apertados. Como exemplo, considere que $U = \{a_1, b_1, \dots, a_k, b_k\}$ tem $|U| = 2k$ elementos e $\mathcal{F}$ contém todos os conjuntos $\{x_1, \dots, x_k\}$ para $x_i \in \{a_i, b_i\}$. Então $|\mathcal{F}| = 2^k$ e Maker vence mesmo se Breaker inicia, usando a seguinte estratégia de pareamento: se Bob escolhe a_i (resp. b_i), Alice escolhe b_i (resp. a_i). No caso em que Alice começa, podemos obter uma instância $\mathcal{F}'$ apertada, adicionando um elemento novo a_0 em cada conjunto $F \in \mathcal{F}$ e fazendo Alice selecionar a_0 em sua primeira jogada (note que $\mathcal{F}'$ é $(k+1)$ -uniforme e $\Delta_1(\mathcal{F}') = |\mathcal{F}'| = |\mathcal{F}| = 2^k$).

No próximo capítulo, veremos que Alice nunca perde em jogos MAKER-MAKER, devido ao *roubo de estratégia*. Portanto, nas mesmas condições dos teoremas desta seção, Bob consegue empate, ao invés de vencer. Também veremos o Teorema 3.4 de Beck (1982), que é uma extensão do Teorema de Erdős e Selfridge (1973) para jogos MAKER-BREAKER (a, b) -tendenciosos, em que Alice pega a elementos e Bob pega b elementos.

3.3 Teoremas de Beck para Maker-Breaker

Na seção anterior, vimos condições de vitória para Bob em jogos MAKER-BREAKER pelo Teorema 3.2 de Erdős e Selfridge (1973). Aqui veremos condições de vitória para Alice pelo Teorema de Beck (1981b) abaixo. Lembre que $\mathcal{F}$ é k -uniforme se $|F| = k$ para todo $F \in \mathcal{F}$. Note que o teorema abaixo também usa a Técnica do Potencial.

Teorema 3.3 (Beck 1981b). *Seja $(U, \mathcal{F})$ instância de MAKER-BREAKER. Então Alice (jogando primeiro como Maker) vence se*

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} 2^{-|F|} > \frac{1}{8} \cdot \Delta_2(\mathcal{F}) \cdot |U|,$$

onde $\Delta_2(\mathcal{F}) = \max d_2(u, v)$ para $u \neq v \in U$ e $d_2(u, v)$ é o número de conjuntos $F \in \mathcal{F}$ que contém u e v . Consequentemente, se $\mathcal{F}$ é k -uniforme, então Alice vence se $|\mathcal{F}| > 2^{k-3} \cdot \Delta_2(\mathcal{F}) \cdot |U|$.

Demonstração. Aplicando a Técnica do Potencial novamente, considere para cada $F \in \mathcal{F}$ o mesmo potencial $2^{-|F|}$ usado na prova do Teorema 3.2 de Erdős e Selfridge (1973), ou seja, a probabilidade de Alice (como Maker) conseguir todos os elementos de F caso o jogo fosse jogado aleatoriamente (assumindo que cada elemento tem probabilidade $1/2$ de ser escolhido por Alice ou por Bob). Lembre que, se Bob pega um elemento de F , o potencial de F vai a zero, ou seja, F está *morto* para Alice.

Definiremos o valor de um elemento $u \in U$ durante o jogo como o decréscimo de potencial que haveria se Bob selecionasse u . A estratégia de Alice é bem simples: pegar sempre o elemento $u \in U$ com maior valor.

Vamos considerar os turnos como pares de jogadas (u, v) em que Alice seleciona u e Bob seleciona v . Como visto antes, o potencial de cada conjunto F que contém u dobra, aumentando em $2^{-|F|}$. Cada conjunto F que contém v diminui seu potencial para 0. Se F contém v , mas não contém u , essa diminuição é de $2^{-|F|}$. Se F contém u e v , essa diminuição é de $2^{-(|F|-1)} = 2 \cdot 2^{-|F|}$.

Portanto, após um par de jogadas (u, v) , a variação de potencial será

$$\sum_{\substack{F \in \mathcal{F}: \\ u \in F}} 2^{-|F|} - \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}: \\ v \in F, u \notin F}} 2^{-|F|} - \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}: \\ u, v \in F}} 2 \cdot 2^{-|F|} \geq - \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}: \\ u, v \in F}} 2^{-|F|},$$

pois u tem valor maior que v pela estratégia de Alice. Ou seja, se o potencial diminuir, essa diminuição não é tão grande, sendo no máximo $\sum_{\substack{F \in \mathcal{F}: \\ u, v \in F}} 2^{-|F|}$, que é menor ou igual a $\Delta_2(\mathcal{F})/4$, visto que conjuntos F que contém u e v tem pelo menos 2 elementos e seu potencial é de pelo menos $1/4$. Como o número de turnos (pares de jogadas) é $|U|/2$, então a diminuição total será de no máximo $\Delta_2(\mathcal{F}) \cdot |U|/8$.

Como o potencial inicial $\sum_{F \in \mathcal{F}} 2^{-|F|}$ é maior que a diminuição máxima de potencial no fim do jogo, o potencial final é maior que 0 e portanto Alice vence, pois algum conjunto $F \in \mathcal{F}$ tem potencial positivo, ou seja, nenhum de seus elementos foi selecionado por Bob. ■

Jogos MAKER-BREAKER tendenciosos. Veremos no próximo capítulo que vários jogos MAKER-BREAKER são fáceis para Alice. Isso motivou Chvátal

e Erdős (1978) a introduzir jogos MAKER-BREAKER (a, b) -tendenciosos em que, para cada turno, Alice pega a elementos e depois Bob pega b elementos. Com essa definição, Beck (1982) provou os resultados abaixo, que são as generalizações dos Teoremas 3.2 e 3.3 para jogos tendenciosos e que também usam a Técnica do Potencial em suas demonstrações. Note que, tomando $a = b = 1$, esses teoremas são contemplados pelos Teoremas 3.2 e 3.3. Na Seção 4.6 do próximo capítulo, serão vistos mais resultados sobre jogos tendenciosos.

A prova do teorema abaixo (que não será mostrada aqui) usa a função de potencial $(1 + b)^{-|F|/a}$ para cada conjunto $F \in \mathcal{F}$.

Teorema 3.4 (Beck 1982). *Sejam a e b dois inteiros e $(U, \mathcal{F})$ um jogo MAKER-BREAKER (a, b) -tendencioso. Se Bob (Breaker) joga primeiro, então ele vence se $\sum_{F \in \mathcal{F}} (1 + b)^{-|F|/a} < 1$. Caso contrário, ele vence se*

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} (1 + b)^{-|F|/a} < \frac{1}{1 + b}$$

Quando $\mathcal{F}$ é k -uniforme, Bob vence sempre que $|\mathcal{F}| < (1 + b)^{k/a}$ se Bob joga primeiro ou, caso contrário, sempre que $|\mathcal{F}| < (1 + b)^{\frac{k}{a}-1}$.

A prova do teorema abaixo (que não será mostrada aqui) usa a função de potencial $(1 + b/a)^{-|F|}$ para cada conjunto $F \in \mathcal{F}$.

Teorema 3.5 (Beck 1982). *Seja $(U, \mathcal{F})$ um jogo MAKER-BREAKER (a, b) -tendencioso. Então Alice (jogando primeiro como Maker) vence se*

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} \left(1 + \frac{b}{a}\right)^{-|F|} > \frac{a^2 b^2}{(a + b)^3} \cdot \Delta_2(\mathcal{F}) \cdot |U|,$$

onde $\Delta_2(\mathcal{F}) = \max d_2(u, v)$ para $u \neq v \in U$ e $d_2(u, v)$ é o número de conjuntos $F \in \mathcal{F}$ que contém u e v . Consequentemente, se $\mathcal{F}$ é k -uniforme, então Alice vence se $|\mathcal{F}| > a^{2-k} \cdot b^2 \cdot (a + b)^{k-3} \cdot \Delta_2(\mathcal{F}) \cdot |U|$.

3.4 Teorema de Hales-Jewett e o Jogo da Velha n^d

Dado um inteiro positivo d , o Jogo da Velha n^d é o jogo MAKER-MAKER $(U, \mathcal{F})$ com $U = [n]^d$ (tabuleiro de lado n e dimensão d) e $\mathcal{F}$ sendo a família das linhas de $[n]^d$, que são os conjuntos com n pontos colineares distintos. Sabe-se que o número de linhas em $[n]^d$ é $[(n + 2)^d - n^d]/2$ (Exercício 3.2). Nesta seção, vemos um comportamento interessante do Jogo da Velha n^d :

- (a) $\forall d, \exists n$: Bob empata o Jogo da Velha n^d ;
- (b) $\forall n, \exists d$: Alice vence o Jogo da Velha n^d .

Prova-se o ponto (a) a partir do Teorema de Erdős e Selfridge (1973) da seção anterior. Prova-se o ponto (b) a partir do Teorema de Hales e Jewett (1963), que veremos nesta seção. Começemos pelo ponto (a).

Como dito na Seção 3.2, o Teorema 3.2 também serve para provar que Bob consegue empatar em jogos MAKER-MAKER e portanto também serve para o Jogo da Velha n^d . Os argumentos faltantes na prova abaixo são pedidos no Exercício 3.3.

Corolário 3.6. *Suponha que $2^{n+1} > (n+2)^d - n^d + 2 \cdot (2^d - 1)$ se n é par ou $2^{n+1} > (n+2)^d - n^d + 3^d - 1$ se n é ímpar, onde $n \geq d \geq 2$ são inteiros. Então, Bob empata (resp. vence) o Jogo da Velha n^d na variante MAKER-MAKER (resp. MAKER-BREAKER). Em particular, isso ocorre no Jogo da Velha n^2 se $n \geq 4$, no Jogo da Velha n^3 se $n \geq 8$ e, para $d \geq 4$, no Jogo da Velha n^d se $n \geq \frac{7}{4}d \cdot \log_2 d$.*

Demonstração. Vimos que no Jogo da Velha n^d existem $[(n+2)^d - n^d]/2$ filas vencedoras, entre linhas, colunas e diagonais. Portanto, considerando $(U, \mathcal{F})$ como a instância correspondente no jogo MAKER-MAKER ou MAKER-BREAKER, temos que $\mathcal{F}$ é n -uniforme e $|\mathcal{F}| = [(n+2)^d - n^d]/2$. Sabe-se também que $\Delta_1(\mathcal{F}) = 2^d - 1$ se n é par e $\Delta_1(\mathcal{F}) = (3^d - 1)/2$ se n é ímpar (Exercício 3.3). Como $|\mathcal{F}| + \Delta_1(\mathcal{F}) < 2^n$ por hipótese, então Bob empata a variante MAKER-MAKER e vence a variante MAKER-BREAKER pelo Teorema 3.2. Em particular, isso ocorre no Jogo da Velha n^2 se $n \geq 4$ e no Jogo da Velha n^3 se $n \geq 8$. ■

O Corolário 3.6 resolve os Jogos da Velha 4^2 , 8^3 , 14^4 e 20^5 de forma elegante. No entanto, não se conhece uma prova simples para o tradicional Jogo da Velha 3^2 , além da análise de casos (Exercício 1.4).

O ponto (b) é provado pelo teorema abaixo. Uma *linha não-decrescente* L de $[n]^d$ é um conjunto de n pontos colineares distintos

$$L = \{(x_{1,1}, \dots, x_{1,d}), \dots, (x_{n,1}, \dots, x_{n,d})\}$$

tal que $x_{i,j} \leq x_{i+1,j}$ para todo $1 \leq i < n$ e $1 \leq j \leq d$.

Como exemplo, para $n = 3$, o quadrado $[n]^2$ possui 8 linhas (3 paralelas ao eixo x , 3 ao eixo y e 2 diagonais), sendo 7 não-decrescentes (exclui-se

uma diagonal). O cubo $[n]^3$ possui 49 linhas (9 paralelas ao eixo x , 9 ao eixo y , 9 ao eixo z , 6 diagonais paralelas ao plano xy , 6 ao plano xz , 6 ao plano yz e 4 diagonais do cubo), sendo 37 não-decrescentes (9 paralelas ao eixo x , 9 ao eixo y , 9 ao eixo z , 3 diagonais paralelas ao plano xy , 3 ao plano xz , 3 ao plano yz e 1 diagonal do cubo).

Teorema 3.7 (Hales e Jewett 1963). *Para todo c, n , existe d tal que toda coloração dos pontos de $[n]^d$ com c cores contém uma linha não-decrescente monocromática.*

Seja o número de Hales-Jewett $HJ_c(n)$ o menor valor de d no teorema acima e seja $HJ(n) = HJ_2(n)$. Seja também $HJ_c^*(n)$ o correspondente de $HJ_c(n)$ substituindo linha não-decrescente por linha (permitindo linhas decrescentes por exemplo). Claramente $HJ_c^*(n) \leq HJ_c(n)$. Como linhas não-decrescentes são linhas, esse teorema implica que qualquer jogo da Velha n^d com c jogadores se alternando em qualquer ordem levará um dos jogadores à vitória se $d \geq HJ_c(n)$. No caso de 2 jogadores ($c = 2$), devido à técnica do roubo de estratégia (vista em detalhes no Capítulo 4), temos o seguinte corolário.

Corolário 3.8. *Para todo n , existe d tal que Alice vence o Jogo da Velha n^d .*

Seja o número de jogo de Hales-Jewett $HJ_g(n)$ o menor valor de d no corolário acima. Um tópico relevante de pesquisa é estudar a relação entre os parâmetros $HJ(n)$ e $HJ_g(n)$. Sabe-se que $HJ_g(n) \leq HJ^*(n) \leq HJ(n)$, que $HJ_g(4) = HJ_g(3) = HJ^*(3) = 3$ (Patashnik 1980) e que $HJ(3) = 4$ (Hindman e Tressler 2014). No entanto, $HJ(4)$, $HJ^*(4)$ e $HJ_g(5)$ permanecem um completo mistério. Note que o espaço de busca para provar que $HJ(4) = d$ é da ordem de $2^{(4^d)}$, que é maior que 10^{77} para $d \geq 4$. O melhor limite superior para $HJ(4)$ é $d \leq 10^{11}$ (Lavrov 2016).

Um ponto impressionante é que na variante Avoider-Avoider do jogo da Velha n^d , em que perde o jogador que obtiver uma linha primeiro, podemos obter estratégias explícitas de empate, conforme o teorema abaixo, cuja prova é simplíssima. Lembre que o ponto central do hipercubo $[n]^d$ pertence a $[n]^d$ se e só se n é ímpar. Considere a seguinte estratégia de pareamento, que chamaremos de *espelhamento*: para qualquer ponto selecionado pelo adversário que não seja o ponto central do $[n]^d$, selecionar o ponto simétrico com relação ao ponto central de $[n]^d$.

Teorema 3.9 (Golomb e Hales 2002). *Considere a variante Avoider-Avoider do Jogo da Velha n^d . Se n é ímpar, Alice consegue empate selecionando primeiro o ponto central de $[n]^d$ e depois seguindo a estratégia de espelhamento. Se n é par, Bob consegue empate seguindo a estratégia de espelhamento.*

Demonstração. Assuma que o jogador seguindo a estratégia de espelhamento perde e seja L a linha obtida por ele. Note que L não pode conter o ponto central, mesmo para n ímpar, devido à estratégia de espelhamento. Portanto, seja L' a linha de $[n]^d$ com os pontos simétricos da linha L . Como o jogador que perdeu estava seguindo a estratégia de espelhamento, então a linha L' foi toda obtida por seu adversário, contradição, pois nesse caso seu adversário teria perdido antes. ■

3.5 Teorema de van der Waerden e o JOGO DA P.A.

O JOGO DA P.A. (n, k) é um jogo posicional em que, dados $n > k$, Alice e Bob escolhem inteiros entre 1 e n e Alice vence se conseguir uma P.A. (progressão aritmética)¹ de tamanho k . Na variante MAKER-MAKER, Bob vence se conseguir uma P.A. de tamanho k (pelo roubo de estratégia, Alice possui pelo menos uma estratégia de empate). Na variante MAKER-BREAKER, Bob vence se Alice não conseguir seu objetivo (e não há empate). Esse jogo também é chamado de *Jogo de van der Waerden (n, k)* , devido ao clássico teorema abaixo, que também faz parte da Teoria de Ramsey.

Teorema 3.10 (van der Waerden 1927). *Para todo c, k , existe n tal que toda coloração dos inteiros de 1 a n com c cores gera uma P.A. (progressão aritmética) monocromática de tamanho k .*

O *número de van der Waerden* $W_c(k)$ é definido como o menor n para o qual vale o Teorema de van der Waerden acima. Seja $W(k) = W_2(k)$. O Teorema de van der Waerden implica que qualquer jogo em que c jogadores escolhem inteiros entre 1 e n levará um dos jogadores à vitória (obtenção de uma P.A. de tamanho k) se $n \geq W_c(k)$. Sabe-se que $W(2) = 3$, $W(3) = 9$, $W(4) = 35$, $W(5) = 178$ e $W(6) = 1132$ (Kouril e Paul 2008). Não se conhece o valor exato de $W(k)$ para $k \geq 7$.

Beck (1981b) definiu o *número jogo de van der Waerden* $W_g(k)$ como o menor n tal que Alice vence a variante MAKER-BREAKER do JOGO DA

¹ Sequência numérica em que a diferença entre elementos consecutivos é uma constante.

P.A. (n, k) . Claramente, $W_g(k) \leq W(k)$: Alice vence o JOGO DA P.A. (n, k) com $n \geq W(k)$ inteiros. Como exemplo, mostramos abaixo que $W_g(3) = 5$ e $W_g(4) = 13$, valores bem menores que $W(3) = 9$ e $W(4) = 35$, respectivamente. A Figura 3.2 ilustra os argumentos da prova. O Exercício 3.7 pergunta como seria na versão MAKER-MAKER.

Teorema 3.11. $W_g(3) = 5$ e $W_g(4) = 13$.

Demonstração. Denotamos as jogadas de Alice e Bob por $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots$, ou seja, Alice escolhe um número A_i e depois Bob escolhe um número B_i no i -ésimo turno. No JOGO DA P.A. $(4, 3)$, Alice e Bob escolhem 2 números cada, sendo impossível Alice obter uma P.A. de tamanho 3.

No JOGO DA P.A. $(5, 3)$, Alice vence tomando $A_1 = 3$. Se $B_1 = 1$, Alice toma $A_2 = 4$ e terá uma das P.A.'s 2-3-4 ou 3-4-5. Se $B_1 = 2$, Alice toma $A_2 = 5$ e terá uma das P.A.'s 3-4-5 ou 1-3-5. Se $B_1 = 4$, Alice toma $A_2 = 1$ e terá uma das P.A.'s 1-2-3 ou 1-3-5. Se $B_1 = 5$, Alice toma $A_2 = 2$ e terá uma das P.A.'s 1-2-3 ou 2-3-4.

A prova de que Bob vence o JOGO DA P.A. $(12, 4)$ será postergada para o Lema 4.3, pois utiliza a estratégia de pareamento, que será vista no próximo capítulo. No restante da prova, vamos mostrar que Alice vence o JOGO DA P.A. $(13, 4)$. A Figura 3.2 contém toda a análise dos casos descrita abaixo. Na 1ª jogada, Alice toma $A_1 = 7$. Sem perda de generalidade, podemos assumir por simetria que $B_1 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Primeiro suponha que $B_1 \in \{1, 2, 3, 4\}$. Alice toma $A_2 = 9$. Se $B_2 \notin \{6, 8, 10\}$, Alice toma $A_3 = 8$ e terá uma das P.A.'s 6-7-8-9 ou 7-8-9-10. Se $B_2 \in \{6, 8, 10\}$, Alice toma $A_3 = 11$ e terá uma das P.A.'s 5-7-9-11 ou 7-9-11-13.

Agora suponha agora que $B_1 = 5$. Alice toma $A_2 = 10$. Se $B_2 \notin \{1, 4, 13\}$, Alice toma $A_3 = 4$ e terá uma das P.A.'s 1-4-7-10 ou 4-7-10-13. Se $B_2 \in \{1, 4\}$, Alice toma $A_3 = 9$, forçando $B_3 = 8$ para evitar a P.A. 7-8-9-10, e assim Alice toma $A_4 = 11$ e terá uma das P.A.'s 7-9-11-13 ou 9-10-11-12. Se $B_2 = 13$, Alice toma $A_3 = 8$, forçando $B_3 = 9$ para evitar a P.A. 7-8-9-10, e assim Alice toma $A_4 = 6$ e terá uma das P.A.'s 4-6-8-10 ou 6-8-10-12.

Finalmente suponha agora que $B_1 = 6$. Alice toma $A_2 = 10$. Se $B_2 \notin \{1, 4, 13\}$, Alice toma $A_3 = 4$ e terá uma das P.A.'s 1-4-7-10 ou 4-7-10-13. Se $B_2 \in \{1, 4, 13\}$, Alice toma $A_3 = 9$, forçando $B_3 = 8$ para evitar a P.A. 7-8-9-10, e assim Alice toma $A_4 = 5$ e terá uma das P.A.'s 3-5-7-9 ou 5-7-9-11. ■

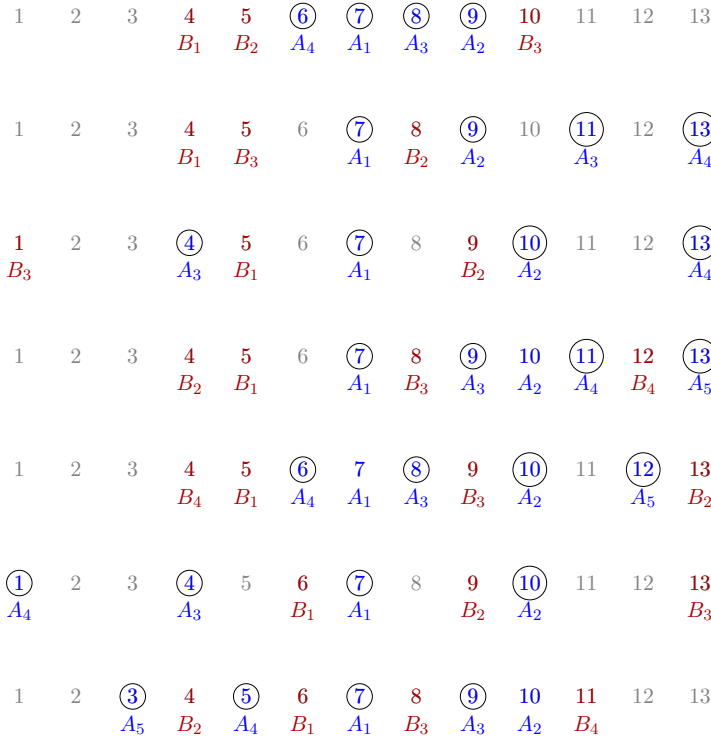


Figura 3.2: Prova do Teorema 3.11 de que $W_g(4) \leq 13$, onde A_i e B_i representam as jogadas de Alice e Bob no turno i .

O limite superior $W_g(k) \leq W(k)$ não é muito útil, visto que o melhor limite superior para o número de van der Waerden $W(k)$ é muito grande:

Teorema 3.12 (Z. Szabó 1990; Gowers 2001).

$$W(k) < 2^{2^{2^{2^{k+9}}}}$$

Ademais, para todo $\varepsilon > 0$ e k suficientemente grande,

$$W(k) > \frac{2^k}{k^\varepsilon}$$

No entanto, há limites bem mais razoáveis para o número jogo de van der Waerden $W_g(k)$, usando o Teorema 3.2 de Erdős e Selfridge (1973) e o Teorema 3.3 de Beck (1981a).

Teorema 3.13 (Beck 1981b). $W_g(k) = 2^{k \cdot (1+o(1))}$.

Demonstração. Para o JOGO DO P.A. (n, k) , seja $U = \{1, \dots, n\}$ e $\mathcal{F}$ a família de conjuntos de k elementos de U que formam uma P.A. Ou seja, $\mathcal{F}$ é k -uniforme. Vamos estimar o valor de $|\mathcal{F}|$. Sejam $a_1, \dots, a_k$ os elementos de uma P.A. Sabe-se que $a_k = a_1 + (k-1) \cdot r$, onde a razão r da P.A. é um inteiro entre 1 e $(n-1)/(k-1)$. Para simplificar, assuma que $n-1$ é múltiplo de $k-1$. Tomando $a_k = n$, temos que $a_1 = n - (k-1)r$. Portanto, o número de P.A.'s com razão r é $n - (k-1)r$.

$$|\mathcal{F}| = \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{k-1}} [n - (k-1) \cdot r] = \frac{(n-1) \cdot (n-k+2)}{2 \cdot (k-1)}$$

Note também que $\Delta_1(\mathcal{F}) \leq k \cdot (n-1)/(k-1)$ e que $\Delta_2(\mathcal{F}) \leq \binom{k}{2}$ (Exercício 3.4). Com isso,

$$|\mathcal{F}| + \Delta_1(\mathcal{F}) \leq \frac{(n-1) \cdot (n-k+2)}{2 \cdot (k-1)} + \frac{k \cdot (n-1)}{k-1} \leq 2^k,$$

para $n \lesssim (4\sqrt{k}) \cdot 2^{k/2}$ e portanto, nesse caso, Bob vence pelo Teorema 3.2. No entanto, a obtenção do exponencial 2^k , ao invés de $2^{k/2}$, é obtida através de uma estratégia refinada para Bob levando em conta também o valor de $\Delta_2(\mathcal{F})$, e que não mostraremos aqui. Ademais,

$$\frac{|\mathcal{F}|}{\Delta_2(\mathcal{F})} \geq \frac{(n-1) \cdot (n-k+2)}{k \cdot (k-1)^2} > 2^{k-3} \cdot n,$$

para $n \gtrsim (k^3/8) \cdot 2^k$ e portanto, nesse caso, Alice vence pelo Teorema 3.3. ■

3.6 Outro Teorema de Beck e o jogo CLIQUE-RAMSEY

O jogo CLIQUE (n, k) é um jogo posicional em que, dados $n > k$, Alice e Bob escolhem arestas do grafo completo K_n e Alice vence se conseguir uma clique de tamanho k . Na variante MAKER-MAKER, Bob também vence se conseguir uma clique de tamanho k (pelo roubo de estratégia, Alice possui pelo menos uma estratégia de empate). Na variante MAKER-BREAKER, Bob vence se Alice não conseguir seu objetivo (e não há empate). Esse jogo também é chamado de *Jogo de Ramsey*, pois é bastante relacionado ao clássico Teorema de Ramsey.

Teorema 3.14 (Ramsey, 1928). *Para todo c, k , existe n tal que qualquer coloração das arestas do grafo completo K_n com c cores gera uma clique monocromática de tamanho k .*

O famoso *número de Ramsey* $R_c(k)$ é definido como o menor n para o qual vale o Teorema de Ramsey acima. Seja $R(k) = R_2(k)$. O Teorema de Ramsey implica que qualquer jogo em que c jogadores escolhem arestas do grafo completo K_n levará um dos jogadores à vitória (obtenção de uma clique de tamanho k) se $n \geq R_c(k)$. Sabe-se que $R(1) = 1$, $R(2) = 2$, $R(3) = 6$, $R(4) = 18$ e que $R(5) \in \{43, \dots, 46\}$ (Angeltveit e McKay 2024). Não se sabe o valor exato de $R(k)$ para $k \geq 5$. Os conhecidos limitantes abaixo para números de Ramsey foram obtidos por Erdős (1947).

Teorema 3.15 (Erdős 1947, Erdős e Szekeres 1935).

$$2^{k/2} < R(k) < 4^{k-1}$$

Beck (1981b) definiu o *número jogo de Ramsey* $R_g(k)$ como sendo o menor n tal que Alice vence a variante MAKER-BREAKER do Jogo da Clique (n, k) . Claramente $R_g(k) \leq R(k)$, ou seja, Alice vence em qualquer Jogo da Clique (n, k) com $n \geq R(k)$ vértices. Como exemplo, mostramos abaixo o caso mais conhecido do Teorema de Ramsey e sua variante de jogo.

Teorema 3.16. $R(3) = 6$, mas $R_g(3) = 5$.

Demonstração. A Figura 3.3(a) mostra que $R(3) > 5$, pois nessa 2-coloração das arestas do K_5 não há triângulo monocromático. A seguir mostramos a clássica prova de que $R(3) \leq 6$ (ver Figura 3.3(b)). Considere os vértices numerados de v_1 a v_6 no K_6 . Entre as cinco arestas de v_1 (v_1v_2 a v_1v_6), três delas terão a mesma cor numa coloração das arestas do K_6 com as cores A e B . Sem perda de generalidade, suponha que v_1v_3 , v_1v_4 e v_1v_5 tem a cor A . Se v_3v_4 , v_3v_5 e v_4v_5 tem a cor B , então temos o triângulo monocromático $v_3v_4v_5$ com a cor B . Caso contrário, obtemos um triângulo monocromático com a cor A : $v_1v_3v_4$ ou $v_1v_3v_5$ ou $v_1v_4v_5$.

Agora mostramos que $R_g(3) = 5$. É fácil provar que $R_g(3) > 4$ (Exercício 3.5). Considere os vértices numerados de v_1 a v_5 no K_5 (Figura 3.3(c)). No 1º turno, Alice escolhe v_1v_2 e suponha sem perda de generalidade que Bob escolhe uma aresta de v_5 . No 2º turno, Alice escolhe v_3v_4 e Bob escolhe no máximo uma aresta do quadrado $v_1v_2v_3v_4$ (digamos v_2v_4 sem perda de generalidade). No 3º turno, Alice escolhe v_1v_3 e vencerá no 4º turno,

pois Bob não conseguirá evitar um dos triângulos $v_1v_2v_3$ ou $v_1v_3v_4$ para Alice. ■

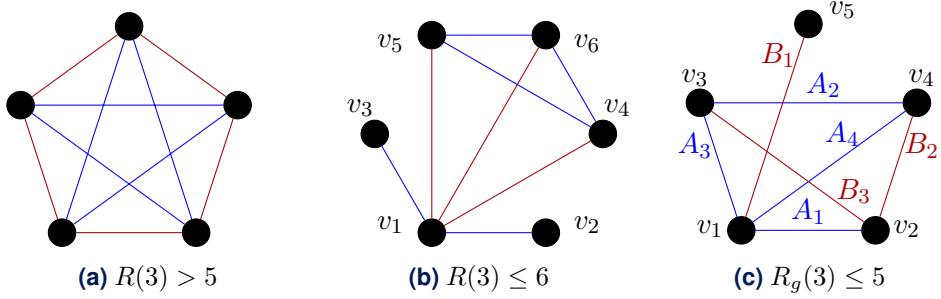


Figura 3.3: Número de Ramsey $R(3) = 6$ e Número Jogo de Ramsey $R_g(3) = 5$

Pelo teorema anterior, Alice vence a variante MAKER-BREAKER do Jogo da Clique $(5, 3)$. O Exercício 3.5 pergunta se Alice também vence a variante MAKER-MAKER do Jogo da Clique $(5, 3)$.

No Jogo da Clique, muitas vezes deseja-se a função inversa do número jogo de Ramsey $k = R_g^{-1}(n)$, ou seja, o maior valor de k para o qual Alice vence o Jogo da Clique (n, k) . O limite superior acima implica que Alice vence se $n \geq 4^k$, ou seja, se $k \leq \frac{1}{2} \log_2 n$. Aplicando o Teorema 3.2 de Erdős e Selfridge (1973) no Jogo da Clique, é possível provar (Exercício 3.6) que Bob (como Breaker) vence se $k \geq 2 \log_2 n$. Esses limitantes foram bastante melhorados por Beck (2002) no teorema abaixo.

Teorema 3.17 (Beck 2002). *No jogo CLIQUE (n, k) :
Alice (Maker) vence se*

$$k \leq 2 \log_2 n - 2 \log_2 \log_2 n + 2 \log_2 e - 10/3 + o(1)$$

e Bob (Breaker) vence se

$$k \geq 2 \log_2 n - 2 \log_2 \log_2 n + 2 \log_2 e - 1 + o(1),$$

onde $o(1)$ se torna desprezível para $n \geq 2^{10^{10}}$.

De acordo com Beck (2008) sobre o Jogo da Clique (n, k) , se $n \geq 2^{10^{10}}$ e $k' = 2 \log_2 n - 2 \log_2 \log_2 n + 2 \log_2 e - 3$ não é muito próximo de um inteiro

(o que ocorre para grande maioria dos números), então Alice vence com $k = \lfloor k' \rfloor$ e perde com $k = \lceil k' \rceil$. Como exemplo, tomando $n = 2^{(33+10^{10})}$, temos que $k = 2 \cdot 10^{10} - 1$ e, com isso, Alice não consegue obter uma clique com 20 bilhões de vértices, mas consegue com qualquer número menor. Esse nível de precisão é impressionante, considerando que pouco se sabe sobre valores pequenos de n .

3.7 Exercícios

Exercício 3.1. Prove que, no jogo de 1 jogador dos Soldados de Conway, são necessários 2, 4, 8 e 20 soldados para avançar 1, 2, 3 e 4 metros em campo inimigo, respectivamente.

Exercício 3.2. Prove que o número de linhas em $[n]^d$ é $[(n+2)^d - n^d]/2$.

Exercício 3.3. Complete os argumentos que faltam na prova do Corolário 3.6.

- (a) Prove que no Jogo da Velha n^d com $n \geq 2$: $\Delta_1(\mathcal{F})$ é igual a $2^d - 1$ se n é par ou $(3^d - 1)/2$ se n é ímpar.
- (b) Prove que, se $d = 2$, então $2^{n+1} > (n+2)^d - n^d + 2 \cdot (2^d - 1)$ e $2^{n+1} > (n+2)^d - n^d + 3^d - 1$ para todo $n \geq 4$. Prove também que, se $d = 3$, então $2^{n+1} > (n+2)^d - n^d + 2 \cdot (2^d - 1)$ para todo $n \geq 8$ e $2^{n+1} > (n+2)^d - n^d + 3^d - 1$ para todo $n \geq 9$.
- (c) Prove que, se $d \geq 4$, Bob empata no Jogo da Velha n^d para $n > \frac{6.73}{4} \cdot d \cdot \log_2 d$.

Exercício 3.4. Mostre, na prova do Teorema 3.13, os valores de $\Delta_1(\mathcal{F})$ e $\Delta_2(\mathcal{F})$, onde $\mathcal{F}$ é a família de conjuntos que formam P.A.'s de tamanho k em $\{1, \dots, n\}$.

Exercício 3.5. Prove que $R_g(3) > 4$. O Teorema 3.16 mostra que Alice vence a variante MAKER-BREAKER do Jogo da Clique $(5, 3)$. E com relação a variante MAKER-MAKER? Alice vence ou Bob consegue empatar?

Exercício 3.6. Use o Teorema 3.2 de Erdős e Selfridge (1973) para provar que Bob (como Breaker) vence o Jogo da Clique se $k \geq 2 \log_2 n$.

Exercício 3.7. Prove que, na variante MAKER-MAKER do JOGO DA P.A. $(n, 4)$, o menor n em que Alice vence é 15.

4

Jogos Posicionais

“As the theory of Positional Games is obviously too extensive and diverse to be comprehensively covered in such a relatively short text, we settled on an admittedly subjective but hopefully representative selection of topics and results.”

Hefetz, Krivelevich, Stojakovic, Szabó, 2014,
no livro Positional Games de 150 páginas.

No Capítulo 3, vimos alguns resultados combinatórios clássicos sobre jogos posicionais, como os teoremas gerais de Erdős e Szekeres (1935) e de Beck (1981a) para o jogo MAKER BREAKER, o Teorema de Hales e Jewett (1963) para o Jogo da Velha n^d e outros dois importantes teoremas de Beck sobre o Jogo da Clique (n, k) e o Jogo da P.A. (n, k) , mostrando uma forte relação entre jogos posicionais e áreas clássicas de pesquisa, como Teoria dos Grafos e Combinatória, principalmente a Teoria de Ramsey. Neste capítulo, nós nos aprofundamos mais ainda nesta família clássica de jogos combinatórios, mostrando técnicas específicas, como a *estratégia de pareamento* e o *roubo de estratégia*, além de mostrar alguns jogos posicionais estudados recentemente, como o Jogo do Grafo H .

Como dito no Capítulo 1, os jogos posicionais são constituídos por um conjunto finito $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ chamado *tabuleiro* e uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de U chamado *conjuntos críticos*, os quais dependendo do jogo são chamados de *conjuntos vencedores* ou *conjuntos perdedores*. Muitas vezes, é interessante ver $(U, \mathcal{F})$ como um hipergrafo com vértices em U em que as hiperarestas são os conjuntos críticos em $\mathcal{F}$. Dois jogadores, Alice e Bob, começando por Alice, alternadamente selecionam para si um vértice não selecionado. Com isso, o status de cada elemento durante o jogo pode ser “*não selecionado*”, ou “*selecionado por Alice*” ou “*selecionado por Bob*”.

Como já vimos, existem várias convenções de vitória. A primeira que foi introduzida é a convenção MAKER-MAKER (Hales e Jewett 1963) em

que o vencedor é o primeiro que seleciona todos os vértices de um conjunto vencedor. Jogos MAKER-MAKER são por vezes chamados de *jogos posicionais fortes*. Um exemplo típico é o famoso Jogo da Velha 3^2 (TICTACTOE) em que o tabuleiro é uma grade 3×3 e os conjuntos vencedores são todas as linhas (horizontais, verticais e diagonais) com três vértices. Veremos na Seção 4.2 que o argumento do *roubo de estratégia* prova que Alice nunca perde em jogos MAKER-MAKER. Por isso, Chvátal e Erdős (1978) introduziram o jogo mais simples MAKER-BREAKER em que Alice vence se conseguir preencher um conjunto vencedor e, caso contrário, Bob vence. Ou seja, não há empate. Nota-se com isso que existem jogos posicionais bastante diferentes, com critérios distintos de vitória.

Nesse capítulo, vamos dar uma atenção maior ao jogo posicional mais amplamente estudado de todos: o jogo MAKER-BREAKER. Na última seção, mencionaremos brevemente outras convenções de jogo. Para mais informações sobre jogos posicionais, indicamos ao leitor os excelentes textos de Beck (2008), Hefetz et al. (2014) e Oijid (2024).

4.1 Estratégia de Pareamento e o Jogo da Velha n^2

Esta seção é dedicada a apresentar uma das principais técnicas para determinar o resultado de jogos posicionais do tipo MAKER-MAKER e MAKER-BREAKER, a saber, a *estratégia de pareamento*. Ela consiste em cobrir o tabuleiro com pares disjuntos de elementos e, sempre que o oponente seleciona um elemento de um par, o jogador seleciona o outro elemento do mesmo par.

Um exemplo é o jogo MAKER-BREAKER com $U = \{r, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n\}$ e conjuntos vencedores do tipo $\{r, x_1, \dots, x_n\}$, onde $x_i \in \{a_i, b_i\}$ para todo $i = 1, \dots, n$. Alice vence com uma estratégia de pareamento simples, selecionando r e, a partir daí, se Bob seleciona b_i , Alice seleciona a_i , e vice-versa. No exemplo com $n = 2$, temos $U = \{r, a_1, b_1, a_2, b_2\}$ e conjuntos vencedores $\{r, a_1, a_2\}$, $\{r, a_1, b_2\}$, $\{r, b_1, a_2\}$ e $\{r, b_1, b_2\}$.

Outro exemplo semelhante é o jogo MAKER-BREAKER em que Alice e Bob selecionam vértices de uma árvore binária e Alice deseja obter um caminho da raiz r até alguma folha da árvore. Alice vence com uma estratégia de pareamento muito simples: ela seleciona a raiz r e, a partir daí, sempre seleciona o irmão do vértice selecionado por Bob. No final do jogo,

como todo vértice selecionado por Alice terá um filho também selecionado por ela, isso levará a um caminho da raiz r até alguma folha.

Abaixo ilustramos a estratégia de pareamento através do Jogo da Velha n^2 e do jogo associado k -EM-FILA.

Jogo da Velha n^2 . Lembre que nesse jogo MAKER-MAKER, Alice e Bob selecionam elementos do tabuleiro $n \times n$ e vence quem conseguir uma das $2n + 2$ filas primeiro (n linhas, n colunas e 2 diagonais). Alice vence facilmente para $n = 1$ e $n = 2$. O Exercício 1.4 pede para mostrar que há empate para $n = 3$ na variante clássica MAKER-MAKER, mas que Alice vence na variante MAKER-BREAKER. O Corolário 3.6 mostra que Bob empata a variante MAKER-MAKER e vence a variante MAKER-BREAKER para $n \geq 4$ usando o Teorema 3.2 de Erdős-Selfridge.

Vamos mostrar uma prova alternativa disso (do Corolário 3.6 referente ao Jogo da Velha n^2 para $n \geq 4$) usando a estratégia de pareamento. Vamos começar com $n = 5$. No tabuleiro 5×5 , há 25 elementos que serão divididos em 12 pares numerados de 1 a 12 na Figura 4.1 mais um elemento indicado por *, o qual não precisa ser pareado. Note que, nos pareamentos da Figura 4.1, toda fila (linha, coluna ou diagonal) possui 2 elementos de algum par. Desse modo, sempre que Alice seleciona um elemento de um par, Bob seleciona o outro elemento do mesmo par, garantindo assim pelo menos um elemento de cada fila, impedindo que Alice vença. Assim, Bob empata a variante MAKER-MAKER e vence a variante MAKER-BREAKER.

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 10 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 5 & 12 \\ 4 & 6 & 7 & 7 & 12 \\ 9 & 6 & 8 & 9 & * \\ 1 & 11 & 8 & 10 & 11 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 10 & * & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 5 & 12 & 14 \\ 4 & 6 & 7 & 7 & 12 & 14 \\ 9 & 6 & 8 & 9 & * & * \\ * & 11 & 8 & 10 & 11 & * \\ 1 & 13 & 13 & * & * & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 10 & * & * & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 5 & 12 & 14 & 16 \\ 4 & 6 & 7 & 7 & 12 & 14 & 16 \\ 9 & 6 & 8 & 9 & * & * & * \\ * & 11 & 8 & 10 & 11 & * & * \\ * & 13 & 13 & * & * & * & * \\ 1 & 15 & 15 & * & * & * & * \end{bmatrix}$
---	--	---

Figura 4.1: Estratégia de pareamento dos Jogos da Velha 5^2 , 6^2 e 7^2 . Os números indicam os pares. Não é necessário parear os elementos *. Note que toda fila possui dois elementos de algum par.

O lema abaixo mostra que é possível obter estratégias de pareamento para um tabuleiro maior a partir de estratégias para um tabuleiro menor, como ilustrado na Figura 4.1. Note que nessa figura o pareamento de 6^2 se baseia no de 5^2 e que o pareamento de 7^2 se baseia no de 6^2 .

Lema 4.1. *Se o tabuleiro n^2 tem uma estratégia de pareamento, então o tabuleiro $(n+1)^2$ também tem.*

Demonstração. Suponha que o tabuleiro n^2 tem uma estratégia de pareamento e considere inicialmente o mesmo pareamento para $(n+1)^2$. Remova o par cujos elementos estão na diagonal secundária de n^2 . Inclua os pares $(T_{n+1,1}, T_{1,n+1})$, $(T_{n+1,2}, T_{n+1,3})$ e $(T_{2,n+1}, T_{3,n+1})$, onde $T_{i,j}$ representam as posições do tabuleiro. Os demais elementos não são pareados.

Note que a diagonal principal, toda linha i e toda coluna j com $1 \leq i, j \leq n$ contém algum par pelo pareamento do tabuleiro n^2 . Além disso, a diagonal secundária contém o par $(T_{n+1,1}, T_{1,n+1})$, a linha $n+1$ contém o par $(T_{n+1,2}, T_{n+1,3})$ e a coluna $n+1$ contém o par $(T_{2,n+1}, T_{3,n+1})$. ■

Com isso, resta apenas mostrar uma estratégia de pareamento para o tabuleiro 4×4 , que é um pouco mais complicada. A Figura 4.2 mostra os três pareamentos possíveis, que dependem da primeira jogada de Alice, marcada com A, sendo B a resposta de Bob para a primeira jogada de Alice, onde podemos assumir por simetria que a primeira jogada de Alice é em umas das 3 posições indicadas com A na figura. Note que toda fila que não contém B possui os dois elementos de algum par.

$$\begin{bmatrix} \text{A} & 1 & 1 & 7 \\ 2 & \text{B} & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 6 \\ 7 & 5 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & \text{A} & 1 & 7 \\ 2 & \text{B} & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 6 \\ 7 & 5 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & \text{B} & \text{A} & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 6 \\ 7 & 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Figura 4.2: Três estratégias de pareamento do Jogo da Velha 4^2 , as quais dependem da primeira jogada A de Alice. A resposta de Bob a essa primeira jogada é indicada com B. Note que toda fila que não contém B possui dois elementos de algum par.

Jogo k -EM-FILA. Dados inteiros $n > k > 0$, considere um tabuleiro $n \times n$, onde assumimos que n é arbitrariamente grande. Alice e Bob colorem alternadamente os vértices da grade de vermelho e azul, respetivamente. Alice vence se conseguir criar uma linha vermelha (horizontal, vertical ou diagonal) de comprimento pelo menos k . Caso contrário, Bob vence.

Em primeiro lugar, é fácil mostrar que Alice tem uma estratégia vencedora para $k \leq 4$ (ver Exercício 4.1). O caso $k = 5$ parece ser muito mais complicado. De fato, o caso particular $k = 5$ e $n = 15$ é conhecido como o

jogo GOMOKU, e foi provado por computador que Alice tem uma estratégia vencedora neste jogo (Alus, van den Herik e Huntjens 1996).

Por outro lado, Zetters (1980) provou que Bob tem uma estratégia vencedora para $k \geq 8$. Vamos mostrar abaixo a prova do caso $k = 9$ usando a técnica da estratégia de pareamento.

Lema 4.2 (Zetters 1980). *Bob vence o jogo k -EM-FILA para todo $k \geq 9$.*

Demonstração. Considere o tabuleiro coberto por peças no formato H como ilustrado na Figura 4.3. Note que cada linha (horizontal, vertical ou diagonal) de tamanho 9 intersecta 3 vértices de pelo menos uma peça H, nos vértices $\{b, e, g\}$ ou $\{c, d, e\}$ ou $\{a, d, g\}$ ou $\{b, d, f\}$ (linhas azuis na Figura 4.3). Isto leva à seguinte estratégia local para Bob: se ele conseguir pegar para cada peça H um elemento de cada conjunto $\{b, e, g\}$, $\{c, d, e\}$, $\{a, d, g\}$ e $\{b, d, f\}$, então Bob terá um elemento de todas as linhas de tamanho 9 do tabuleiro, vencendo o jogo.

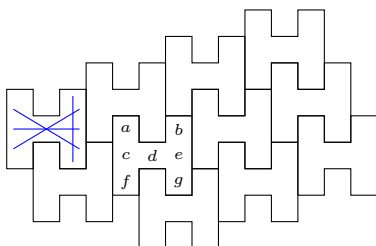


Figura 4.3: Tabuleiro do jogo 9-EM-FILA coberto por peças H.

Uma estratégia vencedora para Bob é então definida da seguinte forma. Considere qualquer peça S no formato H e assuma que Alice é a primeira jogadora a pegar um vértice de S . Se Alice selecionar primeiro o vértice d , então Bob seleciona o vértice e e depois faz os pareamentos $\{a, g\}$ e $\{b, f\}$. Ou seja, se Alice selecionar a (resp. b), Bob seleciona g (resp. f) e vice-versa. Seguindo esta estratégia, Bob garante que nenhuma linha vermelha de comprimento pelo menos 9 tem 3 vértices em S . Se Alice selecionar primeiro o vértice b , Bob seleciona o vértice d e faz o pareamento $\{e, g\}$. Finalmente (os outros casos são simétricos), se Alice selecionar primeiro o vértice e , Bob seleciona d e faz o pareamento $\{b, g\}$. ■

O Exercício 4.2 pede para mostrar que Bob também vence o jogo 8-EM-FILA. Curiosamente, os problemas de decidir o vencedor nos jogos 6-EM-FILA e 7-EM-FILA continuam em aberto.

Em alguns casos, o Teorema 3.2 de Erdős e Selfridge (1973) permite decidir o vencedor facilmente: se não existirem hiperarestas (conjuntos vencedores) demais e se eles forem “suficientemente grandes”, então Bob ganha. Por exemplo, pode-se provar assim que Bob tem uma estratégia vencedora no jogo 40-EM-FILA (Ex. 4.3).

JOGO DA P.A. (n, k) . Na Figura 4.2, vimos estratégias de pareamento para Bob no Jogo da Velha 4^2 que dependem da primeira jogada de Alice. Aqui vamos ver estratégias de pareamento em outro jogo que dependem das duas primeiras jogadas de Alice. O Teorema 3.11, afirma que Alice vence o JOGO DA P.A. $(13, 4)$, mas perde o JOGO DA P.A. $(12, 4)$. A prova deste teorema mostrou apenas a primeira parte. A segunda parte foi postergada para cá, visto que usa a estratégia de pareamento.

Lema 4.3. *Bob vence o JOGO DA P.A. $(12, 4)$.*

Demonstração. Esta prova é uma longa análise de casos e portanto vamos criar uma notação para simplificá-la. Escrevemos $X, Y \rightarrow Z$ para dizer que, se Alice pegar X ou Y , Bob pega Z . Vamos escrever também $X.Y$ para dizer que vamos parear X e Y , ou seja, se Alice pegar X (resp. Y), Bob pega Y (resp. X). Por exemplo, $8, 11 \rightarrow 6$: 3.4, 2.8, 9.10 significa que, se Alice jogar em 8 ou 11, Bob pega 6 e faz os pareamentos $\{3, 4\}$, $\{2, 8\}$ e $\{9, 10\}$. Listamos abaixo as sequências vencedoras para Bob. O objetivo de Bob é pegar em suas duas primeiras jogadas um número par e um ímpar em $\{5, 6, 7, 8\}$, pois isso mata todas as P.A.’s de razão 2 e pelo menos uma P.A. de razão 3, ficando fácil depois parear os números para matar a última ou duas últimas P.A.’s de razão 3 e as P.A.’s de razão 1 restantes.

Caso $1 \rightarrow 7$ (ou seja, se Alice jogar primeiro em 1, Bob responde em 7). Depois: (a) $2, 5, 6, 10, 11 \rightarrow 8$: 3.4, 9.12; (b) $3 \rightarrow 8$: 2.4, 5.6, 9.12; (c) $4 \rightarrow 8$: 2.3, 5.6, 9.12; (d) $8 \rightarrow 6$: 3.4, 5.11, 9.10; (e) $9, 12 \rightarrow 8$: 2.4, 3.6, 10.11.

Caso $2 \rightarrow 5$: (a) $1 \rightarrow 8$: 3.4, 7.10, 9.12; (b) $3, 6, 7, 10, 11 \rightarrow 8$: 1.4, 9.12; (c) $4 \rightarrow 8$: 1.3, 7.10, 9.12; (d) $8, 12 \rightarrow 6$: 1.4, 9.10; (e) $9 \rightarrow 8$: 1.4, 3.6, 11.12.

Caso $3 \rightarrow 6$: (a) $1, 5 \rightarrow 7$: 2.4, 8.11, 9.10; (b) $2, 7, 8, 11, 12 \rightarrow 5$: 1.4, 9.10; (c) $4 \rightarrow 5$: 1.2, 7.10, 9.11; (d) $9 \rightarrow 5$: 1.4, 8.10, 11.12; (e) $10 \rightarrow 5$: 1.4, 8.9, 11.12.

Caso 4→6: (a) 1, 5, 9→7: 2.3, 8.11, 10.12; (b) 2, 8, 12→5: 1.3, 7.10, 9.11; (c) 3→5: 1.2, 7.10, 9.11; (d) 7→5: 1.10, 2.3, 8.9, 11.12; (e) 10→7: 2.3, 8.11, 9.12; (f) 11→5: 1.7, 2.3, 9.10.

Caso 5→7: (a) 1, 2, 6, 10, 11→8: 3.4, 9.12; (b) 3, 12→6: 2.4, 8.11, 9.10; (c) 4, 9→6: 2.3, 8.11, 10.12; (d) 8→6: 3.4, 2.11, 9.10.

Caso 6→8: (a) 1, 2, 5, 9, 10, 11→7: 3.4, 9.12; (b) 3, 7→5: 1.4, 9.12; (c) 4→7: 1.2, 3.5, 9.12; (d) 12→5: 1.4, 3.9, 10.11.

As estratégias para 1ª jogada de Alice em $\{7, \dots, 12\}$ são simétricas. ■

4.2 Roubo de Estratégia e o jogo HEX

Um resultado clássico é que Bob nunca pode ganhar na convenção MAKER-MAKER. Este resultado é obtido pelo importante argumento do *roubo de estratégia* (**strategy stealing**), primeiramente usado por John Nash nos 1940 para provar que Alice vence o jogo HEX, mas publicado pela primeira vez por Hales e Jewett (1963).

Teorema 4.4 (Nash 1940s, Hales e Jewett 1963). *Em todo jogo MAKER-MAKER, Alice vence ou empata.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.1 de Zermelo, um dos jogadores vence ou ambos empatam. Por contradição, suponha que Bob tem estratégia vencedora. Então, Alice seleciona primeiro um vértice arbitrário e depois usa a estratégia vencedora de Bob como se fosse o segundo jogador. Isto é uma estratégia vencedora para Alice, o que é uma contradição.

Mais formalmente, seja $f : 2^U \times 2^U \rightarrow U$ uma estratégia vencedora para Bob, i.e, para cada $A, B \subseteq U$, $A \cap B = \emptyset$ e $|B| = |A| - 1$, seja $f(A, B) \in U \setminus (A \cup B)$ o vértice que deve ser selecionado por Bob quando Alice já selecionou os vértices de A e Bob já selecionou os vértices de B . Então, considere a seguinte estratégia para Alice: primeiro ela seleciona um vértice arbitrário $c_0 \in V$ e deixe b_0 ser o primeiro vértice selecionado pelo Bob. Sejam $A_0 = \{c_0\}$ e $B_0 = \{b_0\}$. Agora, seja (A_i, B_i) a configuração do jogo após o $(i+1)^{th}$ movimento do Bob (i.e., Alice selecionou os vértices em A_i , $c_i \in A_i$, e Bob os vértices em B_i). Então, seja $v = f(B_i, A_i \setminus \{c_i\})$. Se $v \neq c_i$, então Alice seleciona v e $c_{i+1} = c_i$. Caso contrário, Alice seleciona um vértice arbitrário não selecionado c_{i+1} . ■

Como consequência, no tradicional Jogo da Velha 3^2 , Bob não pode ganhar e é fácil mostrar que ambos os jogadores podem garantir um empate

(ver Exercício 1.4). Na verdade, como visto na Seção 3.4, Hales e Jewett (1963) generalizam o Jogo da Velha 3^2 para o Jogo da Velha n^d sobre a grade d -dimensional com lados de tamanho n , onde os conjuntos vencedores são todas as linhas de tamanho n . Vimos no Corolário 3.6 que, se $n \geq \frac{7}{4}d \log_2 d$, ambos os jogadores conseguem empatar o Jogo da Velha n^d . Por outro lado, pelo Teorema 3.7 de Hales e Jewett (1963), Alice vence o Jogo da Velha n^d para todo n com d suficientemente grande.

O roubo de estratégia também pode ser usado em alguns jogos MAKER-BREAKER com certa simetria. Dada uma instância $(U, \mathcal{F})$ do jogo MAKER-BREAKER, dizemos que um conjunto $T \subseteq U$ é *transversal* se $T \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$ (ou seja, é transversal se intersecta todo conjunto vencedor). Intuitivamente, Alice deseja pegar um conjunto vencedor e Bob só consegue impedir se pegar um conjunto transversal. Além disso, o único modo de Alice impedir que Bob pegue um conjunto transversal é pegando um conjunto vencedor. Resumidamente, Alice vence se pegar um conjunto vencedor e Bob vence se pegar um conjunto transversal.

Dado um jogo MAKER-BREAKER $J = (U, \mathcal{F})$, definimos o *jogo transposto* $J^T = (U, \mathcal{T})$ como sendo o jogo MAKER-BREAKER sobre o mesmo tabuleiro U em que a família $\mathcal{T}$ (conjuntos vencedores de J^T) contém os transversais de J . Consequentemente, os transversais de J^T serão os conjuntos vencedores de J . Note que $(J^T)^T = J$: o transposto do transposto de um jogo J é o próprio jogo J .

Dizemos que um jogo MAKER-BREAKER é *simétrico* se existe uma função bijetora $t : U \rightarrow U$ tal que $F \in \mathcal{F}$ se e só se $t(F) \in \mathcal{T}$, onde $t(F) = \{t(u) : u \in F\}$. Ou seja, F é vencedor se e só se $t(F)$ é transversal. Isso implica que todo conjunto vencedor F possui um transversal $t(F)$ de mesmo tamanho, e vice-versa. Note que um jogo MAKER-BREAKER J é simétrico se e só se o jogo MAKER-BREAKER transposto J^T é simétrico.

Como exemplo, considere o jogo HEX na Figura 1.8. Lembre que é um jogo MAKER-BREAKER em que Alice deseja conectar os lados azuis com peças azuis e Bob deseja impedir. O único modo de Bob impedir é obtendo um conjunto transversal, ou seja, conectando os lados vermelhos com peças vermelhas. A Figura 4.4 mostra um conjunto vencedor em azul e um conjunto transversal simétrico em vermelho (função bijetora). As peças verdes estão na interseção dos dois conjuntos. Obviamente, se Alice tem uma estratégia vencedora para ligar os lados azuis, ela também teria uma estratégia vencedora para ligar os lados vermelhos.

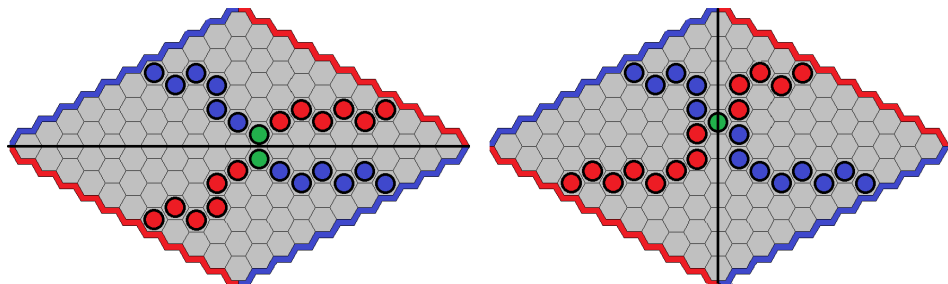


Figura 4.4: Jogo HEX é MAKER-BREAKER simétrico. O caminho azul de Alice é vencedor e o caminho vermelho é transversal. Dois tipos de simetria (horizontal e vertical) para o mesmo caminho azul. As peças verdes estão na interseção das azuis e vermelhas.

Note que o teorema abaixo é não-construtivo. Ou seja, sabe-se que Alice tem estratégia vencedora, mas tal estratégia não é apresentada explicitamente. Em alguns jogos, tal estratégia vencedora que se sabe existir não é conhecida até hoje, como discutiremos depois.

Teorema 4.5 (Nash 1940s). *Alice possui uma estratégia vencedora para todo jogo MAKER-BREAKER simétrico.*

Demonstração. Seja $J = (U, \mathcal{F})$ um jogo MAKER-BREAKER simétrico e seja $\mathcal{T}$ a família de conjuntos transversais de J . Por definição, J possui uma função bijetora $t : U \rightarrow U$ tal que $F \in \mathcal{F}$ se e só se $t(F) \in \mathcal{T}$, ou seja, F é vencedor se e só se $t(F)$ é transversal.

Como não há empate, suponha por contradição que Bob tem estratégia vencedora em J . Ou seja, Bob consegue obter um conjunto transversal antes de Alice obter um conjunto vencedor em J . Vamos mostrar que Bob também tem estratégia vencedora no jogo transposto J^T . Bob simula jogadas no jogo J a partir das jogadas em J^T . Suponha que Alice joga em um elemento x^T de J^T e seja y a melhor resposta de Bob no jogo J caso Alice tivesse jogado em $x = t(x^T)$. Bob joga então em $y^T = t^{-1}(y)$ no jogo J^T . Como os elementos y de Bob formam um conjunto transversal em J pela estratégia vencedora, então os elementos $y^T = t^{-1}(y)$ formam um conjunto vencedor de J e portanto um conjunto transversal em J^T , levando a uma estratégia vencedora em J^T para Bob.

Com isso, vamos obter uma contradição, apresentando uma estratégia vencedora para Alice em J a partir do *roubo das estratégias* vencedoras

de Bob em J e em J^T . Alice faz uma jogada qualquer em J e, após isso, *rouba a estratégia* de Bob do seguinte modo, jogando como segundo jogador. Alice simula jogadas no jogo transposto J^T a partir das jogadas em J e se vê como segundo jogador de J^T . Suponha que Bob joga em um elemento y de J . Seja x^T o elemento jogado na estratégia vencedora do segundo jogador em J^T caso o primeiro jogador tivesse jogado em $y^T = t(y)$. Então Alice joga no elemento $x = t^{-1}(x^T)$ no jogo J , a menos que Alice já tenha jogado em x (por exemplo, na primeira jogada arbitrária); nesse caso, Alice seleciona um elemento qualquer.

Como os elementos x^T de Alice formam um conjunto transversal em J^T pela estratégia vencedora do segundo jogador em J^T , então os elementos $x = t^{-1}(x^T)$ formam um conjunto vencedor no jogo J , levando a uma estratégia vencedora em J para Alice, uma contradição. ■

Como o jogo HEX é claramente MAKER-BREAKER simétrico, temos:

Corolário 4.6. *Alice possui estratégia vencedora no jogo HEX no tabuleiro hexagonal $n \times n$ para qualquer $n \geq 1$.*

Apesar de sabermos que Alice tem estratégia vencedora em qualquer tabuleiro $n \times n$ do jogo HEX, ainda é um problema em aberto encontrar uma estratégia vencedora explícita para $n \geq 10$ (Pawlewicz e Hayward 2014). Curiosamente, o jogo HEX clássico é no tabuleiro 11×11 .

Finalmente, decidir se Alice possui estratégia vencedora a partir de uma dada posição inicial do jogo HEX é um problema PSPACE-completo (Reisch 1981). No entanto, se a posição inicial é simétrica, horizontal ou verticalmente (Figura 4.5), então Alice vence HEX, já que o jogo se torna MAKER-BREAKER simétrico (Exercício 4.4).

4.3 Complexidade de Jogos Posicionais

As seções anteriores nos mostraram modos de se obter estratégias vencedoras ou de empate. Surge então a questão da complexidade computacional dos jogos MAKER-BREAKER e MAKER-MAKER, ou seja, dada uma instância $(U, \mathcal{F})$ de um desses jogos, decidir se Alice tem estratégia vencedora.

É fácil decidir instâncias em que $|F| \leq 2$ para todo $F \in \mathcal{F}$ (ou seja, todo conjunto vencedor tem no máximo 2 elementos). Se existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $|F| = 1$, Alice vence na primeira jogando selecionando o único elemento de

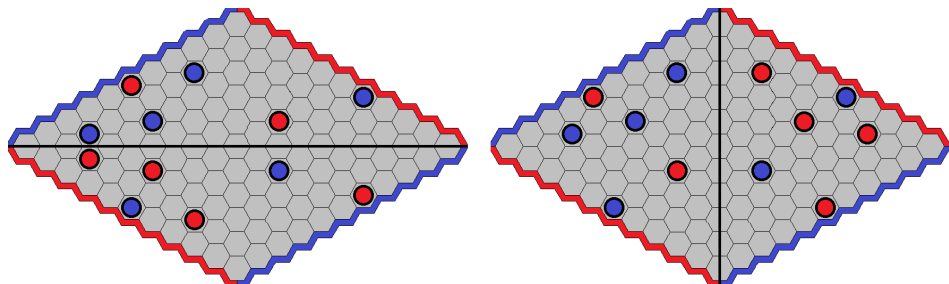


Figura 4.5: Duas posições iniciais simétricas para o mesmo conjunto de peças azuis. HEX também é MAKER-BREAKER simétrico se a posição inicial é simétrica. Alice vence em tais posições iniciais.

F . Se $|F| = 2$ para todo $F \in \mathcal{F}$, então Alice vence se e só se existe um elemento em dois conjuntos vencedores diferentes (Exercício 4.5).

No entanto, em geral, a questão é mais difícil. Por exemplo, considere o problema POSCNF (Capítulo 5 para mais detalhes) em que a instância é uma fórmula lógica φ na Forma Normal Conjunta (CNF) tal que toda variável aparece positivamente. Neste problema, Alice e Bob atribuem alternadamente um valor verdadeiro ou falso às variáveis. O objetivo de Alice é tornar a fórmula φ verdadeira. Esse é um jogo MAKER-BREAKER em que o tabuleiro é o conjunto de variáveis e os conjuntos vencedores (para Bob) são as cláusulas. Aqui, Bob (segundo jogador) atua como Maker, enquanto Alice (primeira jogadora) atua como Breaker (deseja obter um conjunto transversal de todas as cláusulas).

Schaefer (1978) provou que o problema POSCNF é PSPACE-completo mesmo quando as cláusulas têm no máximo 11 variáveis. Mais recentemente, Rahman e Watson (2023) generalizaram este resultado para o caso de cláusulas com um máximo de 6 variáveis. Isto implica que o problema de decidir o resultado de um jogo MAKER-BREAKER em hipergrafos 6-uniformes (i.e., em jogos $(X, \mathcal{F})$ com $|f| = 6$ para cada $f \in \mathcal{F}$) é PSPACE-completo. Por outro lado, como foi dito anteriormente, o problema é polinomialmente resolúvel 2-uniform hypergraphs. Além disso, demonstrou-se recentemente que o problema é polinomialmente resolúvel se $|f| \leq 3$ para cada $f \in \mathcal{F}$ (Galliot 2023). O caso dos hipergrafos c -uniformes para $c \in \{4, 5\}$ ainda está em aberto.

Do ponto de vista da complexidade parametrizada, foi demonstrado que os jogos MAKER-BREAKER são $W[1]$ -difíceis parametrizados pelo compri-

mento do jogo. Precisamente, Bonnet et al. (2017) provaram que o jogo HEX generalizado (dado um grafo e dois vértices s e t , Alice tem como objetivo reivindicar os vértices de um caminho s - t) é $W[1]$ -completo parametrizado pelo comprimento do jogo.

Devido ao fato de os jogos MAKER-BREAKER serem PSPACE-completos mesmo quando as hiper-arestas têm um tamanho limitado, foram estudados jogos mais restritos. Em particular, jogos MAKER-BREAKER mais específicos podem ser definidos através de grafos. Mais precisamente, dado um grafo $G = (V, E)$, um jogo $(V, \mathcal{F})$ pode ser definido de tal forma que $\mathcal{F}$ é um conjunto particular de subconjuntos de vértices/arestas que satisfazem algumas propriedades em G : por exemplo, $\mathcal{F}$ pode ser o conjunto dos conjuntos dominantes de G , ou o conjunto dos subgrafos conexos induzidos de pelo menos uma dada ordem, ou o conjunto dos conjuntos de cascos de G , ou os conjuntos de arestas que induzem um subgrafo pré-definido. De seguida, discutimos alguns destes jogos específicos.

4.4 Jogos sobre as arestas de um grafo.

O *Jogo do Grafo H* (ou simplesmente *Jogo H*) é um jogo MAKER-BREAKER em que o tabuleiro é o conjunto $E(G)$ de arestas de um grafo G e os conjuntos vencedores são todos os subconjuntos de arestas que induzem um subgrafo H predefinido ou todos os subconjuntos de arestas que induzem um subgrafo H com uma propriedade predefinida (por exemplo, H é um ciclo hamiltoniano, H é um emparelhamento perfeito ou H é uma árvore geradora de G). Por exemplo, no Jogo P_4 sobre um grafo G , Alice tenta conseguir as três arestas de algum caminho P_4 induzido do grafo G .

Jogo da Clique. O Jogo CLIQUE (n, k) já foi visto na Seção 3.6: o tabuleiro é o conjunto de arestas do grafo completo K_n (com n vértices). Esse jogo pode ser visto como um jogo H em que $H = K_k$ (grafo completo com k vértices). Na sua versão principal, MAKER-BREAKER, Alice vence se e só se colorir as arestas de uma clique com k vértices. O Jogo da Clique é importante porque ilustra a forte ligação entre jogos posicionais e a Teoria de Ramsey. Como visto na Seção 3.6, o número jogo de Ramsey $R_g(k)$ é o menor n tal que Alice vence o Jogo da Clique (n, k) . Ou seja, Alice vence se e só se $n \geq R_g(k)$. Além disso, vimos que $R(k) \geq R_g(k)$, onde $R(k)$ é o número de Ramsey. O Teorema 3.15 de Erdős e Szekeres (1935) mostra que $R(k) \leq 4^{k-1}$. O Teorema 3.16 mostra que $R(3) = 6$ e $R_g(3) = 5$.

Finalmente, o Teorema 3.17 de Beck (2002) mostra que Alice vence se $k \leq \frac{1}{2} \log_2 n$ e Bob vence se $k \geq 2 \log_2 n$.

Jogo da Conectividade. Nesse jogo, o objetivo de Alice é pegar todas as arestas de uma árvore geradora do grafo G , conseguindo conectar todos os vértices de G com suas arestas. O Jogo da Conectividade nos dá a oportunidade de apresentar outras aplicações das estratégias de pareamento e do argumento do roubo de estratégia.

Considere inicialmente o caso simples em que o grafo tabuleiro é o grafo completo K_n (com n vértices). Nesse caso, Alice tem a seguinte estratégia simples: seleciona sempre uma aresta não selecionada de modo que as arestas que selecionou induzam um grafo acíclico. Se ela conseguir pegar $n - 1$ arestas, ela ganha. De fato, ela vence, pois consegue seguir esta estratégia durante $n - 1$ passos, já que o único modo de Bob impedir é pegando as arestas de um corte, que contém pelo menos $n - 1$ arestas. O resultado seguinte trata do caso de um grafo geral.

Teorema 4.7 (Lehman 1964). *No Jogo da Conectividade, Alice vence como 2ª jogadora se e só se o grafo tem 2 árvores geradoras disjuntas em arestas.*

Demonstração. Primeiro, suponha que existem duas árvores geradoras T_0 e T_1 do grafo $G = (V, E)$ disjuntas em arestas. Sempre que Bob pega uma aresta e de T_i que divide V em duas partes (as duas componentes ligadas de $T_i \setminus \{e\}$), então Alice pega uma aresta de T_{1-i} que liga estas duas partes. É possível provar formalmente que esta estratégia é vencedora para Alice, usando indução em $|V|$: sempre que Alice seleciona uma aresta, contraia a aresta e remova o laço gerado (por isso, é necessário considerar multigrafos).

Por outro lado, se Alice vence como segunda jogadora, é fácil ver que também vence como primeira jogadora. Consideremos um jogo em que ambos os jogadores seguem essa estratégia vencedora. Então, no final do jogo, cada jogador garante ter selecionado um subgrafo conexo de G . Assim, uma vez que os subgrafos selecionados por ambos os jogadores são disjuntos, G tem pelo menos duas árvores geradoras disjuntas. ■

Uma perspectiva de combinatória. Muitos jogos MAKER-BREAKER foram estudados pela primeira vez com o grafo completo K_n como tabuleiro. Este é o caso de

- *Jogo da Conectividade*, em que os conjuntos vencedores são os conjuntos de arestas de uma árvore geradora do grafo;

- *Jogo da Clique*, em que os conjuntos vencedores são os conjuntos de arestas que induzem uma clique K_q , onde q é uma constante;
- *Jogo Hamiltoniano*, em que os conjuntos vencedores são os conjuntos de arestas que induzem um ciclo Hamiltoniano;
- *Jogo de Emparelhamento Perfeito*, em que os conjuntos vencedores são os conjuntos de arestas que induzem um emparelhamento perfeito.

Como Alice tem vantagem por ser a primeira a jogar, Chvátal e Erdős (1978) introduziram a noção de jogos (p, q) -tendenciosos em que, a cada turno, Alice pega p elementos e Bob pega q elementos (geralmente $q \geq p$). Esses jogos também foram estudados em grafos aleatórios (por exemplo, grafos de Erdős-Renyi). Na seção 4.6 faremos um breve levantamento dos principais resultados combinatórios dos jogos tendenciosos.

No resto desta seção, concentramo-nos na complexidade computacional do Jogo H em tabuleiros gerais e analisamos alguns dos resultados recentes obtidos nesta área. Sobre o Jogo do Emparelhamento Perfeito, Duchêne, Gledel, Mc Inerney et al. (2025) mostraram que decidir se Alice tem uma estratégia vencedora é PSPACE-completo. Sobre o Jogo H quando H é um grafo fixo, o problema de decidir se Alice vence o jogo foi estudado por Duchêne, Gledel, Mc Inerney et al. (2025). O problema é resolvível em tempo polinomial para alguns grafos H , mas PSPACE-completo para outros (Figura 4.6).

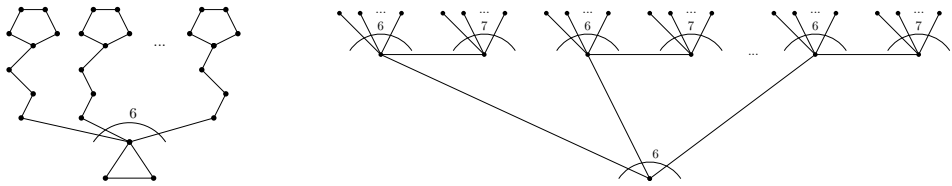


Figura 4.6: Exemplos de grafos H em que o jogo H é PSPACE-completo.

No caso de $|E(H)| \leq 3$ (incluindo o caso em que H é um triângulo ou um caminho induzido P_4 com 4 vértices), Galliot (2023) provou que decidir se Alice vence pode ser feito em tempo polinomial. No entanto, esse resultado é um metateorema e a sua complexidade de tempo pode ser melhorada em classes de grafos mais restritas (ver Exercício 4.6).

Duchêne, Gledel, Mc Inerney et al. (2025) mostraram que existe um grafo H com 51 vértices (resp., uma árvore com 91 vértices) tal que o Jogo

H é PSPACE-completo (estes grafos estão representados na Figura 4.6). Ainda é um problema em aberto determinar o menor número de vértices de um grafo (ou de uma árvore) H tal que o Jogo H seja PSPACE-completo. De uma forma mais geral, caracterizar o conjunto de grafos H de forma a que o Jogo H possa ser resolvido em tempo polinomial é um problema interessante em aberto.

Outros resultados nesta direção foram obtidos por Duchêne, Gledel, Mc Inerney et al. (2025), que mostraram que o Jogo H quando H é uma estrela qualquer pode ser resolvido em tempo polinomial em árvores e, em grafos gerais, é FPT parametrizado pelo comprimento do jogo (número de jogadas). Usando argumentos semelhantes (grosso modo, que o grau máximo e o diâmetro devem ser limitados), provou-se que o Jogo H onde o tabuleiro é uma árvore é FPT no comprimento do jogo para qualquer grafo H .

4.5 Jogos sobre os vértices de um grafo

Na seção anterior, nós nos concentramos em jogos em que o tabuleiro é o conjunto de arestas de um grafo. Nesta seção, consideramos jogos em que o tabuleiro é o conjunto de vértices de um grafo.

Jogo MAKER-BREAKER de Dominação em Grafos: No Capítulo 8, veremos outras variantes do Jogo de Dominação. Aqui estamos interessados na variante MAKER-BREAKER. O tabuleiro é o conjunto V de vértices de um grafo $G = (V, E)$ e os conjuntos vencedores são os conjuntos dominantes de G ¹. Assim, o jogo $(V, \mathcal{F})$ é o jogo MAKER-BREAKER em que os jogadores selecionam vértices e Alice deseja obter todos os vértices de um conjunto dominante de G ².

Note que esta forma de definir o jogo tem um inconveniente importante: sua descrição pode ser exponencial na dimensão do grafo, já que a família $|\mathcal{F}|$ de conjuntos dominantes pode ter tamanho exponencial em $|V|$. É possível descrever este jogo de forma polinomial em $|V|$ como $(V, \mathcal{F}')$ em que $\mathcal{F}' = \{N[v]\}_{v \in V}$ é o conjunto de vizinhanças fechadas dos vértices de G , ou seja, $\mathcal{F}'$ é a família de conjuntos transversais de $\mathcal{F}$. Nessa descrição, Alice,

¹ Um conjunto $D \subseteq V$ é *dominante* em um grafo $G = (V, E)$ se $N[D] = V$, i.e., se todo vértice está em D ou tem vizinho em D .

² Note que este jogo é diferente do estudado no Capítulo 8.

ainda jogando primeiro, faz o papel de Breaker, i.e., Bob deseja obter toda a vizinhança fechada $N[v]$ de um vértice v (para que v não seja dominado por Alice) e Alice deseja impedir isso (tornando cada vértice dominado). Apesar disso, mantém-se a descrição original do jogo com conjuntos vencedores sendo os conjuntos dominantes, Maker sendo Alice e Breaker sendo Bob.

Como veremos, este jogo é uma boa oportunidade para ilustrar estratégias de pareamento. Este jogo foi estudado por Gledel (2019) e Duchêne, Gledel, Parreau et al. (2020), que categorizaram os grafos em três classes: $\mathcal{D}$ (para *Dominator*) que é a classe de grafos onde Alice (como Maker) vence como segundo jogador (e assim também como primeiro jogador), $\mathcal{S}$ (para *Staller*) que é a classe de grafos onde Bob (como Breaker) ganha como segundo jogador (e assim também como primeiro jogador) e a classe $\mathcal{N}$ de grafos onde o primeiro jogador tem uma estratégia vencedora. Veja o Exercício 4.7 para exemplos simples de grafos na classe $\mathcal{D}$. Duchêne, Gledel, Parreau et al. (2020) mostraram que decidir a classe de um grafo G é um problema PSPACE-difícil mesmo se G é bipartido ou um grafo split.

Continuemos com uma observação simples:

Lema 4.8. *Se o conjunto de vértices de um grafo G pode ser particionado de tal forma que cada parte induz um grafo em $\mathcal{D}$, então $G \in \mathcal{D}$.*

Demonstração. Isso vem do fato da união disjunta $H_1 \cup H_2$ estar em $\mathcal{D}$ para todo $H_1, H_2 \in \mathcal{D}$, e $\mathcal{D}$ ser fechado sob inclusão de arestas. ■

Como K_2 e todo ciclo pertence a $\mathcal{D}$ (Exercício 4.7), isso implica que todo grafo com emparelhamento perfeito e todo grafo com ciclo hamiltoniano estão em $\mathcal{D}$. Uma questão natural é então perguntar quando vale a direção oposta do Lema 4.8. O Exercício 4.8 trata desta questão para árvores. Precisamente: decidir a classe de uma árvore é um problema polinomial.

Teorema 4.9 (Duchêne, Gledel, Parreau et al. 2020). *Uma árvore está em $\mathcal{D}$ se e só se possui um emparelhamento perfeito.*

Um grafo admite um fator $(1, 2)$ perfeito se o seu conjunto de vértices pode ser particionado em arestas e/ou ciclos. Pelo Lema 4.8 (e pelo Exercício 4.7), se um grafo admite um fator $(1, 2)$ perfeito, então pertence a $\mathcal{D}$. Isso tem uma implicação algorítmica interessante pelo seguinte resultado de Tutte (1953). Dado um grafo $G = (V, E)$ com $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, seja $H(G)$ o grafo bipartido com conjunto de vértices $\{v_1, v'_1, \dots, v_n, v'_n\}$ e arestas $v_i v'_j$ e $v'_i v_j$ em $H(G)$ para cada aresta $v_i v_j$ de G .

Teorema 4.10 (Tutte 1953). *Um grafo G admite um fator $(1, 2)$ perfeito se e só se o grafo bipartido $H(G)$ admite um emparelhamento perfeito.*

Em particular, se G é um grafo regular, então o grafo bipartido $H(G)$ satisfaz a condição de Hall e tem um emparelhamento perfeito. Logo, todo grafo regular pertence à classe $\mathcal{D}$ (Bagan et al. 2024). Além disso, à procura de um reverso do Lema 4.8, Bagan et al. (2024) mostraram que todo grafo periplanar e todo grafo de blocos está em $\mathcal{D}$ se e só se tem um fator $(1, 2)$ perfeito.

Um último exemplo de estratégia de pareamento que gostaríamos de mencionar é quando um grafo admite um *conjunto dominante pareado* (PDS, do inglês *pairing dominating set*), i.e., quando existe um conjunto de pares de vértices disjuntos $\{(u_1, v_1), \dots, (u_k, v_k)\}$ tal que $V = \bigcup_{1 \leq i \leq k} N[u_i] \cap N[v_i]$. Claramente, um grafo que admite um PDS pertence a $\mathcal{D}$. Infelizmente, decidir se um grafo admite um PDS é NP-completo (Gledel 2019). Por outro lado, um grafo de intervalo pertence a $\mathcal{D}$ se e só se admite um PDS (Gledel 2019) e a complexidade de decidir se um grafo de intervalo admite um PDS é uma questão em aberto.

Jogo do maior subgrafo conexo. Esse jogo tem como instância um grafo $G = (V, E)$ e um inteiro k . O tabuleiro é V e os conjuntos vencedores são todos os subconjuntos de k vértices de G que induzem um subgrafo conexo. O jogo é monótono no sentido de que, se Alice vence (G, k) , então também vence (G, k') para $k' \leq k$. Isso leva à definição do parâmetro $c_g(G)$ de grafos, que é o maior inteiro k tal que Alice vence (G, k) .

O Exercício 4.9 pede para provar limitantes inferior e superior para $c_g(G)$. Bensmail, Fioravantes, Mc Inerney, Nisse e Oijid (2023) mostraram que decidir se $c_g(G) \leq k$ é PSPACE-completo em grafos planares a partir de uma redução do jogo HEX planar generalizado. Por outro lado, mostram que este problema é polinomial na classe dos grafos $(q, q - 4)^3$. Algumas classes de grafos estão resolvidas e outras parcialmente (Exercício 4.10), mas a complexidade deste problema ainda está amplamente em aberto, mesmo em árvores. Bensmail, Fioravantes, Mc Inerney, Nisse e Oijid (2023) forneceram algumas condições necessárias e/ou suficientes para um grafo ser *A-perfeito*, i.e., $c_g(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, mas uma caracterização polinomial dos grafos *A-perfeitos* ainda está em aberto.

³ Todo conjunto de q vértices induz $\leq q - 4$ P_4 's. Cografos são os grafos $(4, 0)$.

Inicialmente, esse jogo não foi criado como MAKER-BREAKER. Bensmail, Fioravantes, Mc Inerney e Nisse (2022) propuseram primeiramente a seguinte variante: Alice e Bob coloreem alternadamente (vermelho e azul, resp.) os vértices não coloridos de um grafo G . Depois de todos estarem coloridos, vence quem tiver o maior subgrafo monocromático (da sua cor). Usando um argumento de roubo de estratégia, é fácil mostrar que Alice vence ou empata. Mesmo assim, Bensmail, Fioravantes, Mc Inerney e Nisse (2022) mostraram que decidir por vitória de Alice ou empate é PS-SPACE-completo em grafos bipartidos com diâmetro no máximo 5. Por outro lado, Alice vence no caminho P_n e no ciclo C_n com $n \geq 9$ se e só se n é ímpar. Além disso, esse problema é polinomial se G é um cografo (mais uma vez, a complexidade em árvores está em aberto).

Essa variante é classificada como um Jogo Posicional de Pontuação (*Positional Scoring Game*), mencionada no Capítulo 1: conjuntos vencedores são subgrafos conexos e cada um tem uma pontuação (*score*), que é seu número de vértices. Vence quem obtém um conjunto vencedor com mais pontos no final. É semelhante a um jogo MAKER-MAKER, mas não vence o primeiro a obter um conjunto vencedor. O vencedor é decidido no fim do jogo observando a pontuação. Este tipo de jogos faz parte do universo de Milnor (Milnor 1953). Estes jogos estão para além do âmbito deste capítulo e remetemos o leitor interessado para (Micek e Walczak 2011; Larsson, Nowakowski, Neto et al. 2016; Larsson, Nowakowski e dos Santos 2018; Andres, Huggan et al. 2019; Duchêne, Gonzalez et al. 2021; Duchêne, Oijid e Parreau 2024).

4.6 Outras regras e convenções de vitória

Para terminar, damos uma visão geral (não exaustiva) de alguns jogos posicionais além das variantes clássicas. Boa parte desta seção é inspirada no livro de *Positional Games* de Hefetz et al. (2014), em particular no seu Capítulo 3. O leitor interessado deve consultá-lo para mais informações.

Jogos MAKER-BREAKER tendenciosos. Como vimos antes, vários jogos MAKER-BREAKER (como o Jogo da Conectividade e o Jogo da Clique) são muito fáceis para Alice (Maker) com tabuleiro no conjunto de arestas de um grafo completo K_n para n grande. Isto motivou Chvátal e Erdős (1978) a introduzir jogos MAKER-BREAKER (a, b) -*tendenciosos* em que, a cada turno, Alice pega a elementos e depois Bob pega b elementos. Vimos na

Seção 3.3 os Teoremas 3.4 e 3.5 de Beck (1982) sobre condições de vitória em jogos tendenciosos para Bob e para Alice, respectivamente. Vamos mostrar aqui outros resultados para jogos tendenciosos.

Considere um jogo MAKER-BREAKER $(U, \mathcal{F})$ qualquer em que os conjuntos vencedores tem pelo menos dois elementos. Claramente, existe um inteiro $b^* < |U|$ tal que Bob (Breaker) vence o jogo $(1, b)$ -tendencioso se e só se $b \geq b^*$. Este valor b^* é denotado por *limiar tendencioso* (*threshold bias*) e tem sido objeto de muitos estudos em vários jogos.

Por exemplo, no Jogo do Triângulo, que é o Jogo da Clique $(n, 3)$, sabe-se que o limiar tendencioso é no máximo $(2 - 1/24)\sqrt{n}$ (Balogh e Samotij 2011) e é maior que $\sqrt{2n+2} - \frac{5}{2}$ (Chvátal e Erdős 1978). O Exercício 4.12 pede para provar limitantes um pouco mais fracos. O problema de determinar uma constante c tal que o limiar tendencioso b^* do Jogo do Triângulo seja $(c - o(1))\sqrt{n} \leq b^* \leq (c + o(1))\sqrt{n}$ ainda está em aberto.

Além dos Teoremas 3.4 e 3.5 de Beck (1982), foram desenvolvidas outras ferramentas para analisar jogos tendenciosos. Por exemplo, no contexto mais restrito quando os conjuntos vencedores são disjuntos, uma ferramenta poderosa é o teorema abaixo, que obtém melhores resultados do que a generalização de Beck dos critérios de Erdős-Selfridge. Chvátal e Erdős (1978) introduziram o Jogo de Caixas (*Box game*) em que há um conjunto de n caixas $C_1, \dots, C_n$ tal que C_i contém c_i bolas. Em cada turno, Alice escolhe a bolas (podendo ser de caixas diferentes) e depois Bob destrói uma caixa. Alice vence se pegar todas as bolas de uma mesma caixa. Note que isto corresponde ao jogo MAKER-BREAKER $(a, 1)$ -tendencioso $(\bigcup_{i \leq n} C_i, \{C_1, \dots, C_n\})$. Eles também têm um resultado ligeiramente mais fraco no caso não-uniforme (c_i 's não necessariamente iguais).

Teorema 4.11 (Chvátal e Erdős 1978; Hefetz et al. 2014). *Se todos os c_i 's são iguais a uma constante $c > a \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$, então Bob (Breaker) vence o Jogo da Caixa $(a, 1)$ -tendencioso.*

Demonstração. Utilizando a Técnica do Potencial vista no Capítulo 3.1, Chvátal e Erdős (1978) provaram que Bob (Breaker) vence se em cada turno destruir uma caixa com um número mínimo de bolas. ■

Limiar tendencioso versus limiar probabilístico. Em alguns jogos $(1, b)$ -tendenciosos, um bom modo de adivinhar o limiar tendencioso é considerar jogos em que os jogadores jogam aleatoriamente. No final do jogo num

grafo completo K_n , Alice (Maker) seleciona $M = \Theta(n^2/b)$ arestas aleatoriamente, i.e., o seu grafo é um grafo aleatório $G(n, M)$ (um grafo selecionado uniformemente entre todos os grafos com n vértices e M arestas).

Estes grafos aleatórios $G(n, M)$ têm sido amplamente estudados desde a sua introdução por Erdős e Rényi (1960). Em particular, provaram-se vários comportamentos de transição de fase. Por exemplo, sabe-se que, se $M < \frac{n \ln n}{2}$, então $G(n, M)$ é a.a.s.⁴ não conexo, i.e, a probabilidade de $G(n, M)$ ser conexo tende a 0 quando n tende ao infinito. Além disso, se $M > \frac{n \ln n}{2}$, então $G(n, M)$ é a.a.s. conexo (Erdős e Rényi 1960)⁵.

Isto implica que, quando os jogadores jogam aleatoriamente, Alice vence a.a.s. se $b = o(\frac{n}{\ln n})$ e Bob vence se $b = \omega(\frac{n}{\ln n})$. Parece que no Jogo de Conectividade $(1, b)$ -tendencioso (não aleatório), o limiar tendencioso é $(1 + o(1)) \frac{n}{\ln n}$ (Gebauer e T. Szabó 2009), ou seja, da mesma ordem de grandeza. Esboçamos a prova de um resultado ligeiramente mais fraco para ilustrar o uso das ferramentas do parágrafo anterior.

Teorema 4.12. *No Jogo da Conectividade $(1, b)$ -tendencioso sobre o grafo completo K_n , o limiar tendencioso b^* é tal que $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 :$*

$$(\ln 2 - \varepsilon) \cdot \frac{n}{\ln n} \leq b^* \leq (1 + \varepsilon) \cdot \frac{n}{\ln n}$$

Demonstração. Inicialmente tomando $b \leq (\ln 2 - \varepsilon) \frac{n}{\ln n}$, queremos mostrar que Alice vence obtendo uma árvore geradora no jogo $(1, b)$ -tendencioso. Ao invés disso, Alice pode ser vista como tentando pegar uma aresta em cada corte. Ou seja, é interessante vê-la como Breaker no jogo $(b, 1)$ -tendencioso onde os conjuntos vencedores são todos os cortes de K_n . Usando o Teorema 3.4 nesta perspectiva, é possível mostrar que Alice vence.

Tomando $b \geq (1 + \varepsilon) \frac{n}{\ln n}$, queremos mostrar que Bob tem uma estratégia para isolar um vértice, vencendo o Jogo da Conectividade $(1, b)$ -tendencioso. A estratégia se divide em duas fases. Primeiro, não é difícil mostrar que Bob consegue pegar todas as arestas de uma clique C de ordem $\lfloor b/2 \rfloor$ tal que nenhum vértice de C é incidente a uma aresta vermelha (selecionada por Alice). Em seguida, para todo $v \in C$, considere as arestas entre v e $V \setminus C$ como contidas numa caixa B_v (logo, as caixas B_v , $v \in C$ são disjuntas).

⁴ a.a.s significa assintoticamente quase certo (do inglês *asymptotically almost surely*).

⁵ Pode-se provar isso mostrando que, se $M < \frac{1}{2}n \ln n$, então existe um vértice isolado a.a.s.; e que, se $M > \frac{1}{2}n \ln n$, então a.a.s. existe uma aresta entre S e $V \setminus S$ para todo conjunto $S \subseteq V$ com $|S| \leq n/2$.

Durante a segunda fase, Bob joga como Maker no Jogo de Caixas $(B_v)_{v \in C}$. Usando o Teorema 4.11, é possível provar que Bob vence, ou seja, consegue pegar todas as arestas de uma caixa B_v e assim isola o vértice v no jogo original: resumindo, Bob vence o Jogo da Conectividade. ■

Esse mesmo fenômeno da *intuição probabilística* em que o “limiar probabilístico” tem a mesma ordem de grandeza que o limiar tendencioso também se verifica em outros jogos. Por exemplo, o limiar probabilístico para que $G(n, M)$ seja hamiltoniano é $M = \frac{n \ln n}{2}$ (Komlós e Szemerédi 1983), i.e., o limiar tendencioso no Jogo Hamiltoniano aleatório é da ordem de grandeza de $\frac{n}{\ln n}$. Também o limiar tendencioso no Jogo Hamiltoniano (determinístico) é $(1 + o(1)) \frac{n}{\ln n}$ (Chvátal e Erdős 1978; Krivelevich 2011).

Como último exemplo, considere o Jogo H em que H é um grafo fixo. Seja

$$m_2(H) = \max_{\substack{G \subseteq H \\ |V(G)| > 2}} \left\{ \frac{|E(G)| - 1}{|V(G)| - 2} \right\}.$$

Sabe-se que o limiar probabilístico para que $G(n, M)$ contenha a.a.s. um subgrafo acíclico H é $M = n^{2 - \frac{1}{m_2(H)}}$ (Rödl e Ruciński 1995). Também neste caso, o limiar tendencioso (determinístico) tem a mesma ordem (Bednarska e Łuczak 2000). Este jogo tendencioso também foi estudado em grafos aleatórios por Nenadov, Steger e Stojaković (2016), bem como em outras convenções de jogo (como as mencionadas abaixo) por Kronenberg, Mond e Naor (2023).

Para concluir, note que a “intuição probabilística” nem sempre funciona, uma vez que o Jogo do Triângulo (Clique $(n, 3)$) tem limiar tendencioso igual a $\Theta(\sqrt{n})$ enquanto que o limiar probabilístico para que $G(n, M)$ contenha um triângulo a.a.s. é $M = \Theta(n)$.

Jogos Avoider-Enforcer e Waiter-Client. Além dos jogos tendenciosos, também são muito investigadas outras variantes dos jogos posicionais. Por exemplo, no jogo SIM, introduzido por Simmons (1969) (ver também Simmons 2019), o tabuleiro é o conjunto de arestas do K_6 e perde quem primeiro pegar as arestas de um triângulo. Pelo Teorema 3.16 de Ramsey, não há empate. De fato, foi provado por computador que Bob (segundo jogador) consegue evitar um triângulo e vence.

SIM é um jogo AVOIDER-AVOIDER do tipo $(U, \mathcal{F})$ em que os conjuntos críticos de $\mathcal{F}$ não são chamados de vencedores, mas de perdedores. Perde

quem primeiro a obter um conjunto perdedor. Há empate se nenhum conjunto perdedor for selecionado. Os jogos *Avoider-Forcer* $(U, \mathcal{F})$ são ligeiramente diferentes. Alice (*Avoider*) vence se conseguir evitar um conjunto perdedor; caso contrário, Bob vence. Aqui não há empate.

Várias questões semelhantes às que se colocam nos jogos *MAKER-BREAKER* foram consideradas no caso dos jogos *Avoider-Avoider* e *Avoider-Forcer*. Há resultados do tipo Erdős-Selfridge por X. Lu (1991) e de jogo tendencioso em Kronenberg, Mond e Naor (2023). No entanto, estas variantes parecem muito mais difíceis. Por exemplo, só recentemente se demonstrou que decidir o resultado de jogos *Avoider-Forcer* é PSPACE-completo por Gledel e Oijid (2023) e Oijid (2024).

Como exemplo final de uma variante dos jogos posicionais, temos o jogo (a, b) *Waiter-Client* $(U, \mathcal{F})$ em que, a cada turno, Waiter (garçom) propõe primeiro $a + b$ elementos de U ainda não selecionados e depois o Cliente pega b dos elementos propostos e o Garçom pega os a elementos restantes. O Waiter vence se conseguir pegar todos os elementos de um conjunto vencedor de $\mathcal{F}$ (Beck 2002; Beck 2008; Kronenberg, Mond e Naor 2023).

4.7 Exercícios

Exercício 4.1. Mostre que, para cada $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, Alice tem uma estratégia vencedora no jogo k -EM-FILA.

Exercício 4.2. Utilizando o mosaico do tabuleiro descrito na Figura 4.7, mostre que Bob tem uma estratégia vencedora no jogo 8-em-linha.

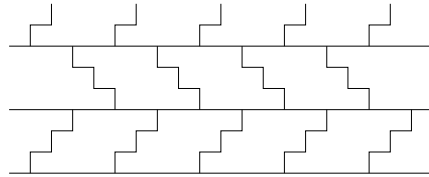


Figura 4.7: Pavimentação da grade para o jogo 8-em-linha.

Exercício 4.3. Mostre com o Teorema de Erdős-Selfridge que Bob vence o jogo *MAKER-BREAKER* 40-EM-FILA (numa grade infinita).

Exercício 4.4. Dê uma definição formal de posição inicial simétrica para HEX, mencionada na Seção 4.2. Prove que HEX é MAKER-BREAKER simétrico se a posição inicial é simétrica.

Exercício 4.5. Considere o jogo MAKER-BREAKER sobre um grafo em que Alice e Bob selecionam vértices alternadamente e Alice vence se pegar as extremidades de uma aresta do grafo. Mostre um algoritmo em tempo linear que decida se Alice vence.

Exercício 4.6. Mostre que Breaker vence o jogo P_4 em G conexo se e só se (1) G é bipartido e todo vértice de grau ≥ 3 está na mesma parte; ou (2) G é um ciclo ímpar; ou (3) G é um subgrafo do touro, K_4 , ou um C_5 com uma folha ligada a um vértice (ver Figura 4.8).

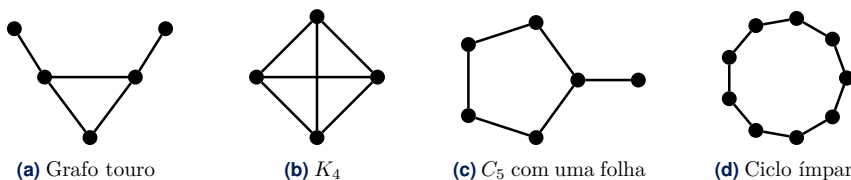


Figura 4.8: Grafos não-bipartidos máximos onde Breaker vence o jogo P_4 .

Exercício 4.7. Considere o Jogo de Dominação da Seção 4.5. Dado um grafo G , seja G' o grafo obtido de G incluindo dois vértices novos x e y adjacentes entre si e adjacentes a todos os vértices de G . Usando estratégias de pareamento, mostre que K_2 , C_n e G' estão na classe $\mathcal{D}$.

Exercício 4.8. Ainda no Jogo de Dominação, seja T uma árvore com um vértice u de grau 2 e adjacente a uma folha v . Seja $\mathcal{X} \in \{\mathcal{D}, \mathcal{S}, \mathcal{N}\}$. Mostre que $T \in \mathcal{X}$ se e só se $T \setminus \{u, v\} \in \mathcal{X}$. Prove o Teorema 4.9.

Exercício 4.9. Mostre que, se G tem n vértices e grau máximo Δ ,

$$1 + \left\lfloor \frac{\Delta}{2} \right\rfloor \leq c_g(G) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

Exercício 4.10. Prove que $c_g(P_n) = c_g(C_n) = 2$ em todo caminho P_n e ciclo C_n . Mostre com uma estratégia de pareamento para Bob que $c_g(G) \leq 6$ em grades hexagonais G . E quanto a $c_g(P_n \square P_m)$ em grades quadradas?

Exercício 4.11. Considere o jogo em que Alice e Bob colorem alternadamente os vértices (vermelho e azul, resp.) até que todo vértice esteja colorido e vence quem tiver o maior subgrafo conexo monocromático da sua cor. Prove que Alice vence em qualquer caminho P_n para $n \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Mostre que Bob empata em P_n se n é par.

Exercício 4.12. No Jogo do Triângulo $(1, b)$ -tendencioso, a cada turno, Alice pinta uma aresta do grafo K_n de vermelho e Bob pinta de azul b arestas. Alice vence se obter um triângulo vermelho; caso contrário, Bob vence. (a) Prove que Alice vence com a seguinte estratégia se $b < \sqrt{n}/2$: ela escolhe um vértice u e, em cada jogada, pinta de vermelho uma aresta de u , a não ser que já consiga fechar um triângulo vermelho e vença. (b) Prove que Bob vence com a seguinte estratégia se $b \geq 2\sqrt{n}$: se Alice pintou de vermelho a aresta $\{u, v\}$ em sua última jogada, Bob pinta $\lfloor b/2 \rfloor$ arestas de u e $\lfloor b/2 \rfloor$ arestas de v (dando prioridade às arestas não pintadas que fechariam um triângulo vermelho). Dica: prova por contradição, mostrando que o grafo vermelho tem grau máximo $\leq \lfloor b/2 \rfloor + 1$.

5

Complexidade Computacional de Jogos

“Games provide many examples which appear to be beyond the limits of practical computation, with an astronomical amount of time. Even and Tarjan (1976) observed that any game with a sufficiently rich structure would probably be complete in PSPACE. Our purpose is to present a number of new games that confirm this observation”

Thomas Schaefer, 1978, adaptado

“The central feature of NP-complete problems is that a yes answer has a short certificate. The analogous concept for PSPACE-complete problems seems to be that of a winning strategy for a 2-player game with perfect information”

Sanjeev Arora e Boaz Barak, 2009

A questão fundamental de um jogo combinatório é decidir o seu resultado: vitória para Alice, vitória para Bob ou empate. Como um problema de decisão (com resposta sim ou não), padronizou-se que a questão é se Alice tem estratégia vencedora. Em um jogo combinatório sem empates, o Teorema 1.1 de Zermelo (1913) nos diz que Bob tem estratégia vencedora se e só se Alice não tem.

Já vimos que, em alguns jogos específicos como o NIM e o NIM-PARTIZAN, esse problema é polinomial, ou seja, existe um algoritmo de tempo polinomial (no tamanho da instância) que decide quem vence. No entanto, veremos neste capítulo que alguns jogos são provados matematicamente como PSPACE-completos e alguns jogos como EXPTIME-completos, considerados os jogos mais difíceis de PSPACE e EXPTIME, que são classes de complexidade computacional mais abrangentes que a classe NP.

Tais provas matemáticas são geralmente baseadas no conceito de redução polinomial entre problemas, que é uma noção clássica já muito usada desde os anos 1970 para provar que certos problemas são NP-difíceis. Nessa

área, reduções para provar NP-dificuldade são muito comuns e ensinadas em cursos obrigatórios de Teoria da Computação para alunos de graduação.

No entanto, reduções para provar PSPACE-dificuldade e EXPTIME-dificuldade, geralmente relacionadas a problemas envolvendo jogos, são mais complexas e praticamente não ensinadas nem para alunos de pós-graduação. Neste capítulo, tentamos cobrir essa lacuna.

5.1 Classes P, NP, PSPACE e EXPTIME

Um problema computacional é de decisão quando se trata de uma pergunta do tipo sim ou não sobre alguma instância do problema. Se a resposta for sim, dizemos que se trata de uma instância SIM; caso contrário, é uma instância NÃO. Assim, para todo jogo combinatório, define-se o seu problema de decisão como sendo o problema de decidir se, dada uma instância do jogo, Alice vence nessa instância: Alice tem uma estratégia vencedora?

Entre as classes de complexidade computacional mais importantes, as quatro classes seguintes de problemas de decisão se destacam¹. Os algoritmos mencionados abaixo são algoritmos determinísticos.

- P: problemas que tem algoritmo de tempo polinomial que os resolvem;
- NP: tem verificador de tempo polinomial para instâncias SIM, que recebe um certificado de que a instância é SIM e verifica se é válido;
- PSPACE: tem algoritmo de espaço polinomial que os resolvem;
- EXPTIME: tem algoritmo de tempo exponencial que os resolvem.

Sabe-se que $P \subseteq NP \subseteq PSPACE \subseteq EXPTIME$ e que, pelo Teorema da Hierarquia de Tempo de Hartmanis e Stearns (1965), $P \neq EXPTIME$.

Como provar que um jogo é PSPACE ou EXPTIME

Dizemos que um jogo combinatório é *limitado*² se toda posição tem profundidade polinomial no tamanho da posição, onde a profundidade (definida no Capítulo 1) é o maior número possível de jogadas a partir da posição

¹ Para maiores detalhes, ver o Capítulo B no apêndice.

² Definição de “*Games, Puzzles and Computation*” de Hearn e Demaine (2009).

até o fim do jogo. O teorema abaixo ajuda a identificar rapidamente se um jogo está em PSPACE ou EXPTIME.

Teorema 5.1. *Todo jogo combinatório limitado pertence a PSPACE. Todo jogo combinatório em que o número de posições possíveis é limitado exponencialmente no tamanho da posição inicial pertence a EXPTIME.*

Demonstração. Vamos mostrar que o algoritmo recursivo abaixo, que define o resultado de um jogo como Alice, Bob ou Empate, tem espaço polinomial no caso de jogos combinatórios limitados.

- **Algoritmo** RESULTADO(posição p):
- 1. **seja** j o jogador na posição p e **seja** $\bar{j}$ o outro jogador
- 2. **se** (p tem profundidade 0) **então**
- 3. **retorne** Alice/Bob/Empate **dependendo do** status de p
- 4. empate $\leftarrow$ **false**
- 5. **para toda** (posição p_i obtida de p com uma jogada de j) **faça**
- 6. $r \leftarrow$ RESULTADO(p_i)
- 7. **se** ($r = j$) **então retorne** j
- 8. **se** ($r = \text{Empate}$) **então** empate $\leftarrow$ **true**
- 9. **se** (empate) **então retorne** Empate; **senão retorne** $\bar{j}$

Considere um jogo limitado e sua pilha de recursão em algum momento do algoritmo RESULTADO acima. Como em cada posição da pilha de recursão usa-se espaço polinomial (pois o número possível de jogadas é polinomial já que todo jogo combinatório tem “regras razoáveis”) e o tamanho da pilha de recursão é polinomial (pois a profundidade é polinomial), então o espaço total utilizado em cada momento do jogo é polinomial. Portanto RESULTADO é um algoritmo de espaço polinomial e o jogo está em PSPACE.

sobre EXPTIME, vimos no Capítulo 1 que os algoritmos *backtracking* VITÓRIA-ALICE, EMPATE-ALICE, VITÓRIA-BOB e EMPATE-BOB têm tempo polinomial no tamanho da árvore do jogo (número de posições possíveis). Logo, se um jogo combinatório tem um número exponencial (no tamanho da posição inicial) de posições possíveis durante o jogo, então esses algoritmos terão tempo exponencial (pois todo jogo combinatório tem “regras razoáveis”³), implicando que o jogo está em EXPTIME. ■

³ Ver definição de jogo combinatório no Capítulo 1.

Jogos PSPACE-completos e Jogos EXPTIME-completos

A complexidade computacional de problemas de decisão é um dos assuntos mais estudados no campo da Teoria da Computação. Estudos amplos sobre o assunto podem ser encontrados nos livros de Garey e Johnson (1990), Arora e Barak (2009) e Papadimitriou (2003).

O famoso problema “ $P=NP?$ ” é um dos mais importantes da Computação que permanece em aberto, sendo um dos sete *Millennium Prize Problems*, cuja solução correta resulta em um prêmio de 1 milhão de dólares, ofertado no ano 2000 pelo *Clay Mathematics Institute*. Os problemas “ $NP=PSPACE?$ ” e “ $PSPACE=EXPTIME?$ ” também permanecem em aberto e são igualmente importantes. Por outro lado, em contraste à questão “ $P=NP?$ ”, note que Savitch (1970) provou que $PSPACE = NPSPACE$.

Uma das principais ferramentas para problemas desse tipo é o estudo dos problemas ditos completos em cada uma dessas classes: os problemas NP-completos, PSPACE-completos e EXPTIME-completos. Para defini-los, é necessária a noção de redução polinomial entre problemas de decisão.

Uma redução polinomial de um problema de decisão Q_1 , com conjunto de instâncias I_1 , para outro problema de decisão Q_2 , com conjunto de instâncias I_2 , é uma função $f : I_1 \rightarrow I_2$ computável em tempo polinomial tal que $i \in I_1$ é uma instância SIM de Q_1 se e só se $f(i) \in I_2$ é uma instância SIM de Q_2 . Neste caso, dizemos que Q_1 é redutível em tempo polinomial a Q_2 e denotamos este fato por $Q_1 \preceq_p Q_2$. Não é difícil ver que, se $Q_1 \preceq_p Q_2$ e $Q_2 \in P$ (Q_2 tem algoritmo polinomial), então $Q_1 \in P$, ou seja, podemos obter um algoritmo polinomial para solucionar Q_1 utilizando a redução polinomial para Q_2 e o algoritmo polinomial de Q_2 .

Dada uma classe $\mathcal{C}$ de problemas de decisão, como NP, PSPACE ou EXPTIME, dizemos que um problema de decisão Q é $\mathcal{C}$ -difícil se $Q' \preceq_p Q$ para todo $Q' \in \mathcal{C}$. Além disso, se Q é $\mathcal{C}$ -difícil e $Q \in \mathcal{C}$, então dizemos que Q é um problema $\mathcal{C}$ -completo (ou completo em $\mathcal{C}$).

O teorema abaixo resume o principal resultado técnico usado para provar que um problema é $\mathcal{C}$ -difícil.

Teorema 5.2. *Seja $\mathcal{C} \in \{NP, PSPACE, EXPTIME\}$ e seja Q_1 um problema $\mathcal{C}$ -difícil. Se $Q_1 \preceq_p Q_2$, então Q_2 é $\mathcal{C}$ -difícil. Se $Q_1 \in P$, então $P = \mathcal{C}$.*

Ou seja, resolver um problema $\mathcal{C}$ -difícil em tempo polinomial implica que todo problema em $\mathcal{C}$ teria um algoritmo polinomial. Por isso, os problemas $\mathcal{C}$ -completos são considerados os mais difíceis da classe $\mathcal{C}$. Como

$P \neq \text{EXPTIME}$, então todo problema EXPTIME-completo está fora de P, ou seja, é intratável no sentido de não possuir algoritmo de tempo polinomial.

O primeiro problema provado NP-completo foi o problema SAT de satisfatibilidade lógica (Cook 1971), que consiste em decidir se, dada uma fórmula lógica Φ na FNC⁴ sobre variáveis $x_1, \dots, x_n$, existe uma atribuição de valores verdadeiro ou falso às variáveis de modo que Φ seja verdadeira. Assim, pelo Teorema 5.2, a obtenção de um algoritmo polinomial para SAT provaria que $P = \text{NP}$. Por outro lado, provar que SAT não tem algoritmo polinomial provaria que $P \neq \text{NP}$.

O primeiro problema provado PSPACE-completo foi o problema QSAT (Stockmeyer e Meyer 1973) de satisfatibilidade quantificada. A instância é uma fórmula lógica quantificada $\Psi = \exists x_1 \forall x_2 \dots \exists x_{2k-1} \forall x_{2k} \dots \Phi$, onde Φ é uma fórmula lógica na FNC sobre as variáveis $x_1, \dots, x_n$ e os quantificadores $\exists$ e $\forall$ se alternam⁵ de x_1 até x_n . Assim como em SAT, o problema QSAT consiste em determinar se Ψ pode ser satisfeita.

O problema QSAT está relacionado a um jogo combinatório em que Alice e Bob se alternam atribuindo valores às variáveis $x_1, \dots, x_n$ nesta ordem. Alice vence se Ψ for verdadeira no final; caso contrário, Bob vence. Note que uma estratégia vencedora para Alice em QSAT consiste em existir ($\exists$) um valor para x_1 jogado por Alice tal que, para toda jogada de Bob ($\forall$) em x_2 , exista ($\exists$) um valor para x_3 jogado por Alice, e assim por diante, até que Ψ seja verdadeira. Nesse sentido, repetimos a citação de Arora e Barak (2009) do início do capítulo:

“Uma propriedade fundamental de problemas NP-completos é ter uma prova curta para instância SIM. O conceito análogo para problemas PSPACE-completos parece ser uma estratégia vencedora em um jogo de dois jogadores com informação perfeita.”

Ou seja, a alternância de quantificadores em QSAT é um indicativo de que alguns jogos combinatórios estão estreitamente relacionados a problemas PSPACE-completos, uma vez que a existência de uma estratégia ven-

⁴ Na Forma Normal Conjuntiva (FNC), a fórmula é uma conjunção ($\wedge$) de cláusulas (disjunções $\vee$), como $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$. Ver Capítulo B para mais detalhes.

⁵ É fácil provar que toda fórmula totalmente quantificada sem essa alternância entre $\exists$ e $\forall$ pode ser transformada em uma fórmula equivalente de QSAT, incluindo variáveis novas que não aparecem em Φ .

cedora para Alice nestes jogos deve seguir exatamente a mesma estrutura de uma resposta SIM em QSAT.

Podemos destacar os seguintes jogos combinatórios PSPACE-completos: Jogo GEOGRAFIA e KAYLES (Schaefer 1978), Hex (Even e Tarjan 1976) num tabuleiro hexagonal $n \times n$ a partir de uma posição dada, Go (Lichtenstein e Sipser 1980) e Amazons (Furtak et al. 2005).

Embora jogos combinatórios sejam uma classe natural de problemas PSPACE-completos, existem jogos que são completos mesmo para a classe EXPTIME, indicando que devem ser mais difíceis que os primeiros. Lembre-se que EXPTIME é uma classe mais abrangente que PSPACE. Esse é mais um ponto importante do estudo da complexidade computacional de jogos combinatórios: identificar exatamente a classe de complexidade do jogo.

Por exemplo, o Jogo de Polícia e Ladrão (*Cops and Robber*), visto no Capítulo 9, foi introduzido por Nowakowski e Winkler (1983). Só 25 anos depois foi obtida a primeira prova de complexidade por Fomin, Golovach, Kratochvíl et al. (2010) de que esse jogo é NP-difícil. Mais 5 anos e foi provado que é PSPACE-difícil por Mamino (2013). Mais 2 anos e foi finalmente provado que é EXPTIME-completo por Kinnersley (2015).

Como $P \subsetneq \text{EXPTIME}$, então todo problema EXPTIME-completo está fora de P, ou seja, não possui algoritmo de tempo polinomial. *Cops and Robbers* e Go (com a regra Ko) são exemplos de jogos EXPTIME-completos (Kinnersley 2015; Robson 1983) e portanto são intratáveis, no sentido de que não podem ser resolvidos em tempo polinomial.

Assim, vemos a importância de se provar que um jogo é PSPACE-difícil ou EXPTIME-difícil. Para isso, o Teorema 5.2 nos fornece a mais importante ferramenta para a análise da complexidade de problemas de decisão: as reduções polinomiais.

5.2 Reduções entre jogos combinatórios

Nesta seção, vamos explicar como obter uma redução polinomial de um jogo para outro. Obter uma redução entre dois problemas de decisão é uma das coisas mais artísticas da Teoria da Computação. É preciso certa dose de criatividade para conseguir relacionar dois problemas que aparentemente são muito diferentes. Isso vale para redução entre problemas NP, mas se torna ainda mais difícil para redução entre problemas PSPACE e também EXPTIME. Vamos explicar por quê. Lembre que, para provar $Q_1 \leq_p Q_2$,

é preciso obter uma função algorítmica f de redução em tempo polinomial que transforma toda instância i de Q_1 em uma instância $f(i)$ de Q_2 tal que i é uma instância SIM de Q_1 se e só se $f(i)$ é uma instância SIM de Q_2 .

Quando Q_1 e Q_2 são problemas em NP, as instâncias SIM podem ser verificadas a partir de um certificado curto⁶. Por exemplo, para verificar que certa fórmula lógica é satisfatível basta apresentar como certificado (ou prova) uma atribuição de valores que satisfaça a fórmula. Por isso, ao argumentar numa redução entre problemas da classe NP, podemos fazer o seguinte. Para provar a ida (“ i é SIM em Q_1 implica $f(i)$ é SIM em Q_2 ”), podemos mostrar que todo certificado de SIM para i em Q_1 leva a um certificado de SIM para $f(i)$ em Q_2 .

Para provar a volta (“ $f(i)$ é SIM em Q_2 implica i é SIM em Q_1 ”), podemos mostrar que todo certificado SIM para $f(i)$ em Q_2 leva a um certificado SIM para i em Q_1 .

No caso de problemas em PSPACE ou EXPTIME, a situação é mais complicada, pois não podemos considerar certificados curtos para instâncias SIM já que não sabemos se os problemas estão em NP. O que temos então em uma instância SIM i de um jogo Q_1 ? Uma estratégia vencedora de Alice em i no jogo Q_1 . Ou seja, para provar a ida do “*se e só se*” da redução, devemos mostrar que, dada uma estratégia vencedora de Alice numa instância i qualquer do jogo Q_1 , Alice também vence na instância construída $f(i)$ do jogo Q_2 , apresentando uma estratégia vencedora para ela.

Para provar a volta do “*se e só se*” da redução, devemos provar também que “ $f(i)$ é SIM em Q_2 implica i é SIM em Q_1 ”. Ou seja, dada uma estratégia vencedora de Alice em $f(i)$ de Q_2 , devemos provar que Alice vence na instância i de Q_1 mostrando uma estratégia vencedora para ela.

No caso de jogos sem empate, que são os mais comuns, Bob vence se Alice não tem estratégia vencedora, pelo Teorema 1.1 de Zermelo (1913). Como a volta também significa pela contrapositiva que “ i é NÃO em Q_1 implica $f(i)$ é NÃO em Q_2 ”, então a volta seria equivalente ao seguinte: dada uma estratégia vencedora de Bob numa instância i qualquer de Q_1 , provar que Bob também vence a instância construída $f(i)$ de Q_2 , apresentando uma estratégia vencedora para ele. Em resumo:

Em jogos combinatórios sem empate, se queremos provar que um jogo Q_2 é PSPACE-difícil, podemos escolher um jogo Q_1

⁶ Recomendamos o exemplo de redução entre problemas NP do Capítulo B.

adequado que já se sabe ser PSPACE-difícil e obter uma função algorítmica f de tempo polinomial que transforme qualquer instância i de Q_1 em uma instância $f(i)$ de Q_2 . Além disso, provar que, se Alice (resp. Bob) vence em i de Q_1 , também vence em $f(i)$ de Q_2 . Análogo para provar EXPTIME-dificuldade.

5.3 PSPACE-completude: exemplos de provas

Nessa seção, veremos alguns exemplos de reduções polinomiais simples entre jogos com o intuito de ajudar na compreensão desse tópico. Escolhemos jogos bem distintos e reduções de jogos variados. Algumas seções dos outros capítulos do livro contêm reduções mais sofisticadas.

Jogo GEOGRAFIA

Um professor de geografia deseja testar se seus alunos conhecem os estados do Brasil. Ele divide a turma em dois grupos, A e B . No início do jogo, o professor escolhe um estado qualquer. Depois os grupos se alternam, iniciando pelo grupo A , falando o nome de um estado ainda não mencionado cuja 1ª letra é a última letra do último estado mencionado. Perde a equipe que não conseguir nomear um estado em sua jogada.

No exemplo da Figura 5.1, o professor poderia começar com o estado da Bahia, o grupo A poderia escolher Alagoas, o grupo B Sergipe e finalmente o grupo A teria o estado do Espírito Santo como única escolha. Como nenhum estado brasileiro inicia com a letra “O”, o grupo B não consegue nomear nenhum estado e portanto a vitória é do grupo A !

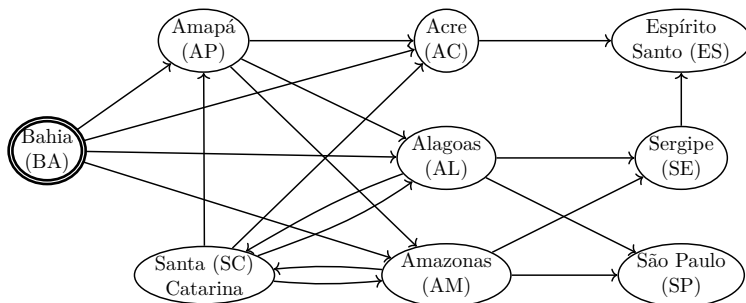


Figura 5.1: Digrafo do Jogo GEOGRAFIA com início no estado da Bahia.

O que o grupo B fez de errado? Após o grupo A ter escolhido Alagoas, o grupo B poderia ter nomeado São Paulo e vencido a disputa. Pelo Teorema de Zermelo, como o jogo é finito e sem empate e tem informação perfeita, um dos grupos deve vencer. Existe alguma estratégia que garanta a vitória do grupo A quaisquer que sejam os estados nomeados pelo grupo B considerando a Bahia como o estado inicial? (Exercício 5.1).

É possível ver o Jogo GEOGRAFIA como um grafo direcionado em que os vértices são os estados e existe um arco uv se e só se a última letra do estado u é a 1ª letra do estado v . A Figura 5.1 mostra esse grafo direcionado para o exemplo do jogo acima, começando com a Bahia.

Formalmente define-se o Jogo GEOGRAFIA: dado um grafo direcionado e um vértice v_0 , Alice e Bob se alternam escolhendo vértices tais que, em cada turno i , $v_0v_1 \dots v_i$ é um caminho direcionado de v_0 a v_i , onde v_i é o vértice escolhido no turno i . Perde quem não puder escolher um vértice em seu turno. Note que é um jogo imparcial na variante normal. Além disso, é limitado (Exercício 5.2) e, pelo Teorema 5.1, está em PSPACE.

O Jogo GEOGRAFIA foi introduzido por Schaefer (1978), que mencionou ser sugestão de seu orientador de doutorado, R. Karp. Fraenkel e Simonson (1993) provaram que algumas variantes desse jogo são PSPACE-completas, inclusive variantes partizan, e obtiveram também algoritmos polinomiais para algumas classes de grafos, como árvores e DAG's.

Teorema 5.3 (Schaefer 1978). *O Jogo GEOGRAFIA é PSPACE-completo.*

Demonstração. Já vimos que o Jogo GEOGRAFIA é PSPACE. Vamos mostrar uma redução polinomial de QSAT. Dada uma instância Φ de QSAT com variáveis $x_1, \dots, x_n$ e cláusulas $c_1, c_2, \dots, c_m$, podemos considerar n par, simplesmente incluindo variáveis não usadas. Lembre pela definição de QSAT que o quantificador da variável x_i é $\exists$ para i ímpar e $\forall$ para i par.

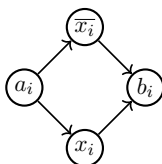


Figura 5.2: Gadget F_i para cada variável x_i da fórmula Φ

Dada a fórmula Φ , construa o digrafo D_Φ . Para cada variável x_i , adicione em D_Φ o gadget F_i da Figura 5.2. Para cada cláusula c_j , adicione

Bob escolhe $z_i \in \{x_i, \overline{x_i}\}$, ele escolhe o que seria falso em sua estratégia em Φ , assumindo que Alice também atribuiu falso aos literais z_i escolhidos por ela no caminho formado até então. Como Bob vence em QSAT, então existe um vértice c_j a ser escolhido por Bob no turno $3n$ que não é ligado a nenhum vértice $z_i^* \in \{x_i, \overline{x_i}\}$ ainda não selecionado, pois existe uma cláusula c_j insatisfeita pela estratégia vencedora de Bob em QSAT. Como Alice não tem escolha após c_j , Bob vence o Jogo GEOGRAFIA. ■

Jogo de Formação de Conjunto Convexo

Jogos de convexidade em grafos foram introduzidos por Harary (1984) e são estudados no Capítulo 6 deste livro. Nesta seção, vamos mostrar que um jogo recente de convexidade, o Jogo de Formação de Conjunto Convexo (CSFG_g: *Convex Set Forming Game*⁷), introduzido por Brosse et al. (2025), é PSPACE-completo.

No jogo CSFG_g sobre um grafo G , Alice e Bob se alternam, começando por Alice, selecionando vértices de modo que em toda jogada o conjunto de vértices selecionados é convexo, onde dizemos que um conjunto $S \subseteq V(G)$ é *convexo* se todo vértice em um caminho mínimo entre dois vértices de S também pertence a S (Figura 6.2). O último a jogar vence (variante normal). Note que esse jogo é imparcial e é limitado polinomialmente, pertencendo a PSPACE pelo Teorema 5.1.

Teorema 5.4 (Brosse et al. 2025). *O Jogo de Formação de Conjunto Convexo (CSFG_g) é PSPACE-completo.*

Demonstração. Já vimos que CSFG_g é PSPACE. Vamos obter uma redução polinomial do Jogo CLIQUE-FORMING de Formação de Clique, definido no Capítulo 1. Para simplificar a escrita, vamos denotá-lo aqui por JFC (Jogo de Formação de Clique). Lembre que JFC segue a variante normal e que Alice e Bob se alternam selecionando vértices que sempre formam uma clique. Além disso, JFC é PSPACE-completo (Schaefer 1978).

Dada uma instância G de JFC, podemos assumir que G não é um grafo completo, senão o jogo seria trivial. Seja G' o grafo obtido a partir de G adicionando vértices novos $U = \{u_1, u'_1, u_2, u'_2\}$ adjacentes a todos os vértices de G e as arestas $u_1u'_1$ e $u_2u'_2$ (Figura 5.4).

⁷ Poderíamos denotar como JFCC o Jogo de Formação de Conjunto Convexo, mas preferimos seguir a tradição de denotar os jogos de convexidade com sua sigla em inglês.

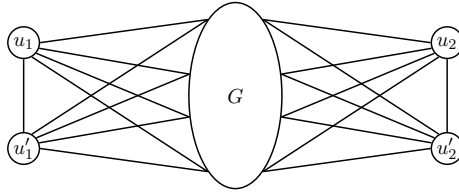


Figura 5.4: Grafo G' obtido a partir de G . Os vértices u_1, u'_1, u_2, u'_2 são adjacentes a todos os vértices de G .

Note que, no jogo CSFG_g sobre G' , os vértices de G selecionados por Alice e Bob devem formar uma clique já que u_1, u'_1, u_2 e u'_2 estão em caminhos mínimos entre quaisquer dois vértices não adjacentes de G . Além disso, não é possível que $w_1 \in \{u_1, u'_1\}$ e $w_2 \in \{u_2, u'_2\}$ sejam selecionados em CSFG_g , já que todo vértice de G pertence a um caminho mínimo entre w_1 e w_2 .

Suponha então que Alice vence JFC em G . Ao jogar o CSFG_g em G' , Alice usa a mesma estratégia vencedora de JFC nos vértices de G . Sempre que Bob escolher um vértice $w \in U$, Alice escolhe em seguida o vértice $w' \in U$ adjacente a w . Note que, após esta jogada de Alice, nenhum vértice de U poderá ser escolhido novamente. Assim o jogo deve prosseguir com cada jogador selecionando vértices de uma clique em G . Como Alice vence o JFC em G , ela será a última a jogar, vencendo o CSFG_g em G' .

Suponha agora que Bob vence JFC em G . Ao jogar o CSFG_g em G' , Bob usa a mesma estratégia vencedora de JFC nos vértices de G . Sempre que Alice escolher um vértice $w \in U$, Bob escolhe em seguida o vértice $w' \in U$ adjacente a w . Note que, após esta jogada de Bob, nenhum vértice de U poderá ser escolhido novamente. Assim o jogo deve prosseguir com cada jogador selecionando vértices de uma clique em G . Como Bob vence o JFC em G , ele será o último a jogar, vencendo o CSFG_g em G' . ■

O Exercício 5.3 pede para provar que a variante *misère* de CSFG_g também é PSPACE-completa a partir de uma redução similar da variante *misère* de JFC, que é PSPACE-completa (Chandran S. V. et al. 2024).

Jogo Normal de Coloração

Jogos de coloração em grafos foram introduzidos por Martin Gardner (1981) e são estudados no Capítulo 7 deste livro. Nesta seção, vamos mos-

trar que a variante normal, chamada de Jogo Normal de Coloração, introduzida por Bodlaender (1991), é PSPACE-completo. Nos jogos de coloração em grafos, a instância é um grafo G e um inteiro k , e Alice e Bob se alternam escolhendo um vértice v de G ainda não colorido e colorindo v com uma cor do conjunto $\{1, 2, \dots, k\}$ de modo que a cor de v seja distinta das cores dos vizinhos já coloridos de v . No Jogo Normal de Coloração, vence o último a jogar. Note que esse é um jogo imparcial.

Teorema 5.5 (Bodlaender 1991). *O Jogo Normal de Coloração é PSPACE-completo para 1 cor ou 2 cores.*

Demonstração. Para 1 cor, note que o jogo de coloração é idêntico ao jogo KAYLES, que é PSPACE-completo (Schaefer 1978), pois dois vértices vizinhos não conseguem ser coloridos. Para 2 cores, obtém-se uma redução a partir do jogo com 1 cor. Dado um grafo $G = (V, E)$ no jogo KAYLES, seja G' formado por vértices v_1 e v_2 para todo vértice $v \in V$, além de um vértice novo x . As arestas de G' são do tipo xv_1 , xv_2 , v_1v_2 , u_1v_1 , u_1v_2 , u_2v_1 e u_2v_2 para todo vértice $v \in V$ e todo vizinho u de v . Note que Alice deve jogar primeiro em x , pois, caso contrário, para cada jogada v_1 (resp. v_2) de Alice com uma certa cor, Bob consegue responder em v_2 (resp. v_1) com a outra cor, sendo sempre o último a jogar (note que x nunca poderá ser colorido). Suponha então que Alice colore x com a cor 2 em sua primeira jogada. Com isso, apenas a cor 1 poderá ser usada nos demais vértices do grafo G' e o jogo se comporta de modo semelhante ao jogo com 1 cor em G e os papéis de Alice e Bob trocados. ■

Jogo de Coloração Conexa

Na subseção anterior, vimos o Jogo Normal de Coloração. O “*Jogo de Coloração*” propriamente dito e que será o foco principal do Capítulo 7 é o da variante de otimização: Alice vence se todos os vértices são eventualmente coloridos; caso contrário, Bob vence. Ou seja, ele não segue a convenção de jogo normal. O Jogo de Coloração foi provado PSPACE-completo por Costa, Pessoa et al. (2020).

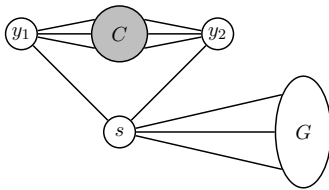
Nesta seção, vamos mostrar que uma variante recente, o Jogo da Coloração Conexa, introduzido por Charpentier et al. (2020), é PSPACE-completo. O Jogo de Coloração Conexa possui as mesmas regras do Jogo de Coloração com uma restrição adicional: o conjunto de vértices coloridos deve sempre formar um subgrafo conexo. Também seguindo a variante de otimização,

Alice vence se todos os vértices são eventualmente coloridos; caso contrário, Bob vence.

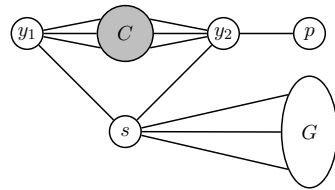
Lima et al. (2022) provaram que a variante do Jogo de Coloração em que Bob joga primeiro é PSPACE-completa. Com isso, provaram também que o Jogo de Coloração Conexa também é PSPACE-completo. Essa redução é mostrada no teorema abaixo.

Teorema 5.6 (Lima et al. 2022). *Jogo de Coloração Conexa é PSPACE-completo.*

Demonstração. Dados um grafo $G = (V, E)$ e um inteiro k como instância da variante do Jogo de Coloração em que Bob joga primeiro, seja $G' = (V', E')$ o grafo obtido de G de acordo com a Figura 5.5, onde C é uma clique de k vértices ligados a y_1 e y_2 , e o vértice s é ligado a todo vértice de G . A prova de Lima et al. (2022) nos permite assumir que $|V|$ é ímpar. Vamos provar que Alice vence o Jogo “Bob primeiro” de Coloração em G com k cores se e só se vence o Jogo de Coloração Conexa em G' com $k + 1$ cores.



(a) Grafo G' se k é par.



(b) Grafo G' se k é ímpar.

Figura 5.5: O grafo G' , obtido de G e k . C é uma clique com k vértices ligados a y_1 e y_2 . Todo vértice de G é vizinho de s .

Suponha que Alice vence o Jogo “Bob primeiro” de Coloração. Ela começa o Jogo de Coloração Conexa em G' colorindo y_1 com a cor 1. Em seu próximo turno, independente da jogada de Bob, Alice colore y_2 com a cor 1. Com essas jogadas, Alice garante que os vértices da clique C podem receber as cores $\{2, \dots, k + 1\}$. Como $|V' - V|$ é ímpar, Alice garante que, sempre que Bob colorir um vértice de $V' - V$, ela colore outro vértice em $V' - V$. Com isso, Alice garante que Bob é o primeiro a jogar em G . Como Alice começa em y_1 e a coloração é conexa, s deve ser colorido antes de qualquer vértice de G . Depois que s é colorido, os vértices de G podem ser coloridos em qualquer ordem, pois todos são vizinhos de s . Além disso, os vértices de G podem ser coloridos com k cores: as $k + 1$ cores exceto a

cor de s . Assim, sempre que Bob colorir um vértice em V , Alice usa sua estratégia vencedora com k cores em G e vence.

Suponha agora que Bob vence o Jogo “Bob primeiro” de Coloração em G . Se Alice começar o Jogo de Coloração Conexa em G' em um vértice de $V \cup \{s\}$, Bob pode pela paridade forçar Alice a ser a primeira a colorir um vértice de $\{y_1, y_2\}$ e, com isso, Bob pode colorir na jogada seguinte o outro vértice desse conjunto com uma cor distinta, vencendo o jogo, pois restam $k - 1$ cores para colorir C . Se Alice começar em outro vértice de G' , Bob pode garantir que Alice irá colorir s pela paridade de $V' - (V \cup \{s\})$. Depois disso, ele pode usar sua estratégia vencedora em G e garantir que pelo menos um vértice em V não possa ser colorido, vencendo o jogo. ■

Ao contrário das provas de PSPACE-dificuldade dos problemas do Jogo GEOGRAFIA e do Jogo de Formação de Conjunto Convexo, nas quais as estratégias vencedoras eram quase que diretamente relacionadas pela redução obtida, no Teorema 5.6 a estratégia vencedora de Bob em G' deve levar em consideração a possibilidade de Alice iniciar a coloração em G . Ao fazer isso, Alice impede que Bob utilize a estratégia vencedora que ele possuía para o jogo “Bob primeiro” de coloração em G . Nesse caso então, Bob usa uma estratégia em G' totalmente desvinculada da original e simplesmente espera até que y_1 ou y_2 seja colorido.

Essa deve ser uma preocupação constante nas provas de complexidade em jogos. Para mostrar que, para dois jogos J_1 e J_2 , temos que $J_1 \preceq_P J_2$ com uma função de redução f , se um jogador M possuir uma estratégia vencedora para uma instância i de J_1 , ele deve possuir uma estratégia para vencer na instância $f(i)$ de J_2 independente da forma como seu adversário se comportar, podendo isso significar ter de adotar uma estratégia nova e completamente distinta da estratégia original para J_1 em i .

5.4 EXPTIME-completude e os Jogos Universais

Stockmeyer e Chandra (1979) provaram alguns dos primeiros jogos EXPTIME-completos no artigo “*Jogos combinatórios comprovadamente difíceis*”, como o jogo da Fórmula Booleana Alternante (ABF: *Alternating Boolean Formula Game*). Nesse jogo, dada uma fórmula lógica Φ na FNC (Forma Normal Conjuntiva) sobre um conjunto de variáveis $X_A \cup X_B$, com valores iniciais dados, os jogadores Alice e Bob se alternam, iniciando por

Alice, alterando o valor de no máximo uma das variáveis. Em cada turno, Alice pode trocar o valor de uma variável de X_A , enquanto Bob pode alterar o valor de uma variável em X_B . Alice vence se conseguir tornar a fórmula verdadeira em alguma jogada; caso contrário, Bob vence. Para que o jogo seja finito, podemos assumir que Bob vence se alguma atribuição de valores se repetir durante o jogo.

Teorema 5.7 (Stockmeyer e Chandra 1979). *O jogo da Fórmula Booleana Alternante (ABF) é EXPTIME-completo.*

Stockmeyer e Chandra (1979) classificaram os jogos EXPTIME-completos como Jogos Universais no sentido de que, “se G denota um destes jogos e R denota qualquer membro de uma grande classe de jogos combinatórios (incluindo Xadrez, Go e muitos outros de interesse popular ou matemático), então o problema de determinar o resultado de R é redutível em tempo polinomial ao problema de determinar o resultado de G ”.

No Capítulo 9, estudaremos em detalhes o Jogo de Polícia e Ladrão ($\mathcal{C}\&\mathcal{R}$: Cops and Robber). Nesse jogo, é dado um grafo G e um inteiro k , e há dois jogadores: $\mathcal{C}$ (Cop) e $\mathcal{R}$ (Robber). Inicialmente $\mathcal{C}$ posiciona k policiais nos vértices de G e, em seguida, $\mathcal{R}$ posiciona um ladrão em um vértice de G . Os jogadores então se alternam movendo suas peças entre vértices adjacentes de G . É permitido que um jogador decida não mover algumas de suas peças (ou mesmo todas elas) em seu turno. O jogo termina com vitória dos policiais se em algum turno um policial ocupar o mesmo vértice do ladrão (neste caso dizemos que o ladrão foi capturado). O ladrão vence se consegue evitar a captura indefinidamente. Para que o jogo seja finito, podemos assumir que o ladrão vence se alguma configuração dos policiais e do ladrão se repetir durante o jogo.

Decidir se o jogador $\mathcal{C}$ possui uma estratégia vencedora com k policiais em um grafo $G = (V, E)$ certamente pode ser feito por um algoritmo de tempo exponencial sobre a árvore do jogo (Berarducci e Intrigila 1993; Hahn e MacGillivray 2006). Como visto no Capítulo 1, o algoritmo sobre a árvore do jogo é inclusive polinomial se k é constante. Portanto, $\mathcal{C}\&\mathcal{R} \in \text{EXPTIME}$.

Nessa seção, vamos mostrar que a variante do jogo $\mathcal{C}\&\mathcal{R}$ em que as posições iniciais dos policiais e do ladrão são dadas é EXPTIME-completo por meio de uma redução a partir de ABF. Para tanto, precisamos do conceito de k -buracos. Um k -buraco é um grafo no qual um ladrão sempre

pode fugir da captura de k policiais. Sabe-se que um k -buraco pode ser construído em tempo polinomial em k (Goldstein e Reingold 1995).

Teorema 5.8 (Goldstein e Reingold 1995). *Decidir se $\mathcal{C}$ vence a variante do jogo $\mathcal{C}\&\mathcal{R}$ com k policiais em que são dadas as posições iniciais dos k policiais e do ladrão no grafo G é EXPTIME-completo.*

Demonstração. Dada uma instância Φ de ABF com $k - 1$ variáveis, vamos construir uma instância de $\mathcal{C}\&\mathcal{R}$ com k policiais em tempo polinomial no tamanho de Φ . Os policiais serão divididos em 3 grupos: k_A (resp. k_B) policiais cujas posições determinarão os valores das variáveis em X_A (resp. X_B) e um policial (chamado *prorador*) que decidirá o momento de verificar se os valores das variáveis satisfaz Φ .

A Figura 5.6 mostra os padrões usados nas figuras para representar arestas entre conjuntos U e V tais que $|U| = |V|$.

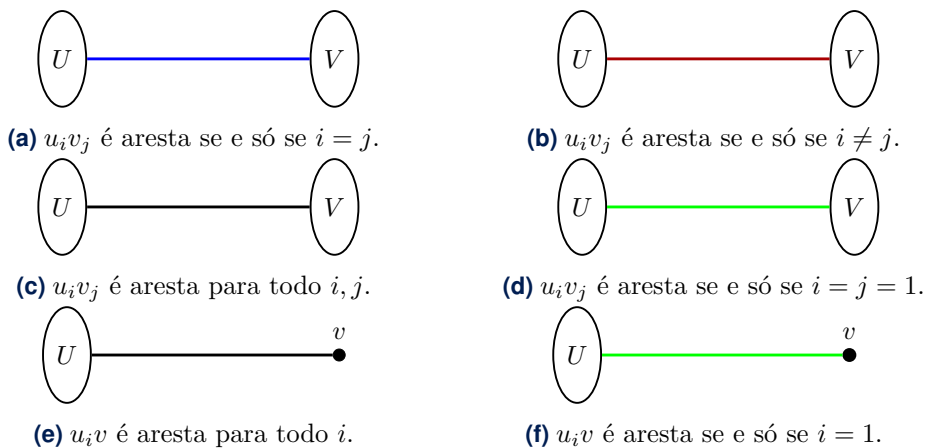


Figura 5.6: Padrão de arestas entre conjuntos de vértices $U = \{u_1, u_2, \dots\}$ e $V = \{v_1, v_2, \dots\}$ com $|U| = |V|$.

O grafo é construído usando três componentes principais, cada uma representando uma fase de ABF. A primeira componente corresponde a etapa na qual Alice muda o valor de uma variável. Nela, o ladrão é forçado a se mover para um vértice e todos, exceto um dos policiais das variáveis de Alice, precisam se mover para posições que mantêm os valores de suas variáveis.

A segunda componente corresponde a etapa em que Bob muda o valor de uma variável. Nela, o movimento do ladrão força exatamente um policial de

Bob a se mover para um vértice que altera o valor de sua variável, enquanto os demais policiais se movimentam para posições que mantêm o valor de suas variáveis.

A terceira componente corresponde a etapa em que Φ é avaliada considerando os atuais valores das variáveis. Nela, o policial provador força o ladrão a se mover para um vértice w_R e depois para um vértice de cláusula de Φ . Se a posição dos policiais induzirem valores (nas variáveis) que satisfazem Φ , haverá um policial adjacente a cada vértice de cláusula e o ladrão será capturado independente da cláusula escolhida. Senão, o ladrão poderá escolher um vértice de cláusula não adjacente a um policial e escapará para um k -buraco onde não será mais capturado. Por isso, é importante que o policial provador só inicie a terceira componente quando os policiais conseguirem uma atribuição que satisfaça a fórmula. Caso contrário, o policial provador consegue forçar o ladrão a voltar às componentes anteriores e recomençar o ciclo.

A primeira componente (escolha de Alice) pode ser vista na Figura 5.7. Os conjuntos U_{BT} , U_{BF} , U_{BTT} , U_{BFF} , U_{BE} têm k_B vértices que serão eventualmente ocupados pelos policiais das variáveis de Bob. Os conjuntos U_{AT} , U_{AF} , U_{ATT} , U_{ATF} , U_{AFF} , U_{AFT} e U_{AE} têm k_A vértices, enquanto os conjuntos U_{AH} e U_{HH} têm $k_A - 1$ vértices e podem ser eventualmente ocupados pelos policiais das variáveis de Alice.

Um policial em U_{BT} , U_{BTT} , U_{AT} , U_{ATT} e U_{AFT} significa que a variável deste policial é verdadeira. Enquanto um policial em U_{BF} , U_{BFF} , U_{AF} , U_{ATF} e U_{AFF} significa que a variável deste policial é falsa.

Nesta componente (da escolha de Alice), o ladrão inicia a partida no vértice u_R e o policial provador em u_P . O i -ésimo policial de Bob ocupa inicialmente o i -ésimo vértice de U_{BT} ou U_{BF} dependendo se a variável é verdadeira ou falsa. O i -ésimo policial de Alice ocupa inicialmente o i -ésimo vértice de U_{AT} ou U_{AF} dependendo do valor da variável.

O ladrão é o primeiro a se mover e é obrigado a passar ao vértice u'_R , senão será capturado pelo policial provador em u_P . O ladrão pode chegar em um buraco se em seu próximo turno houver algum vértice de $U_{BE} \cup U_{AE} \cup \{u_{PE}\}$ não adjacente a um policial. Além disso, ele pode chegar a um buraco também se movendo para u_E e depois para um vértice desprotegido de U_{HH} . Os policias devem então se movimentar de modo a garantir que esses vértices estejam protegidos.

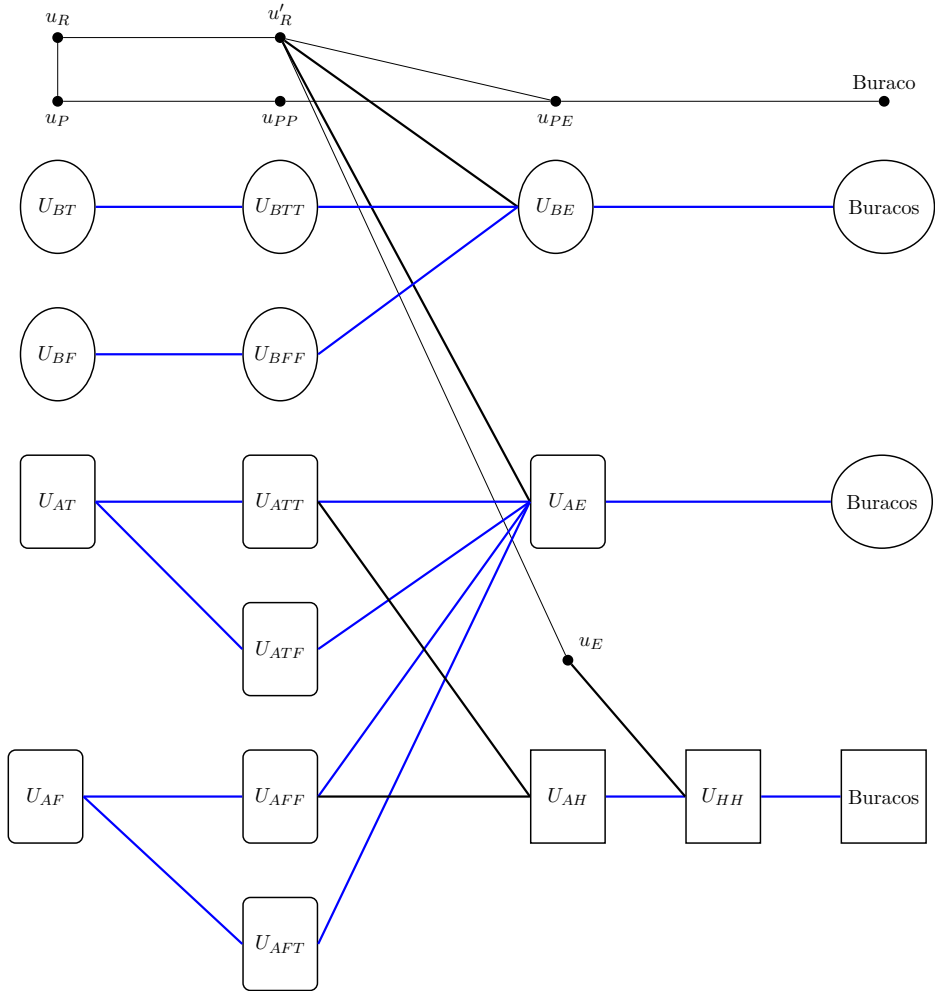


Figura 5.7: Componente associada a escolha de Alice. Cada elipse é um conjunto com k_B vértices, cada retângulo arredondado é um conjunto com k_A vértices e cada retângulo é um conjunto com $k_A - 1$ vértices. Cada vértice denotado como Buraco é uma cópia de um grafo no qual uma vez que o ladrão entra, ele nunca será capturado por k policiais.

Os policiais em U_{BT} e U_{BF} não tem escolha senão avançar para os vértices correspondentes em U_{BTT} e U_{BFF} . Esses policiais cobrem todos os vértices de U_{BE} impedindo que o ladrão vá para U_{BE} . O policial provador

se movimentam para u_{PP} , cobrindo u_{PE} . Observe que todos os policiais associados às variáveis de Bob mantêm o mesmo valor do início da rodada.

Cada policial em U_{AT} (resp. U_{AF}) se movimentam para o vértice correspondente em U_{ATT} ou U_{ATF} (resp. U_{AFF} ou U_{AFT}) cobrindo assim todos os vértices de U_{AE} . No entanto, para impedir que um vértice de U_{HH} fique descoberto caso o ladrão se movimenta para u_E no próximo turno, deve haver pelo menos $k_A - 1$ vértices em $U_{ATT} \cup U_{AFF}$. Desta maneira só pode haver no máximo 1 policial associado a Alice em $U_{ATF} \cup U_{AFT}$, o que significa que no máximo 1 policial de Alice mudou o valor de sua variável.

A segunda componente (escolha de Bob) pode ser vista na Figura 5.8. Um policial em V_{BT} , V_{BTT} , V_{BFT} , V_{AT} ou V_{ATT} significa que a variável associada a ele é verdadeira. Um policial em V_{BF} , V_{BFF} , V_{BTF} , V_{AF} ou V_{AFF} significa que a variável associada a ele é falsa.

Inicialmente o ladrão está em v_R , o policial provador está em v_P . Os policiais associados às variáveis verdadeiras (resp. falsas) de Bob estão em seus vértices correspondentes em V_{BT} (resp. V_{BF}) e os policiais associados às variáveis verdadeiras (resp. falsas) de Alice estão em seus vértices correspondentes em V_{AT} (resp. V_{AF}). O ladrão é o primeiro a se mover.

O ladrão deve se mover para $V_{RT} \cup V_{RF}$, senão será capturado pelo policial provador em v_P . Observe que, se o ladrão alcançar um vértice em V_{BTE} , V_{BFE} , V_{BE} , V_{AE} ou v_{PE} não coberto por um policial, ele pode ir para um buraco, vencendo o jogo. Logo, os policiais devem se mover imediatamente para cobrir estes vértices. O policial provador em v_P vai para v_{PP} impedindo o ladrão de escolher v_{PE} . Os policiais em V_{AT} e V_{AF} movem-se para os vértices correspondentes em V_{ATT} e V_{AFF} cobrindo assim os vértices de V_{AE} . Note que os valores das variáveis de Alice se mantêm.

Nesta fase, suponha que o ladrão foi para o i -ésimo vértice de V_{RT} (resp. V_{RF}). Isso força o policial da i -ésima variável de Bob a ir para o vértice correspondente em $V_{BTT} \cup V_{BFT}$ (resp. $V_{BFF} \cup V_{BTF}$) de modo a garantir que o i -ésimo vértice de V_{BTE} (resp. V_{BFE}) esteja coberto e não poderá ser o destino do ladrão no turno seguinte. Note que efetivamente o movimento do ladrão determina o valor da i -ésima variável de Bob no fim do turno. Os demais policiais das variáveis de Bob devem se mover de V_{BT} para V_{BTT} ou de V_{BF} para V_{BFF} de modo a cobrir os vértices de V_{BE} exceto, possivelmente, o i -ésimo vértice que, por construção, não pode ser alcançado pelo ladrão em seu próximo turno. Assim, todas as demais variáveis de Bob tem seu valor inalterado.

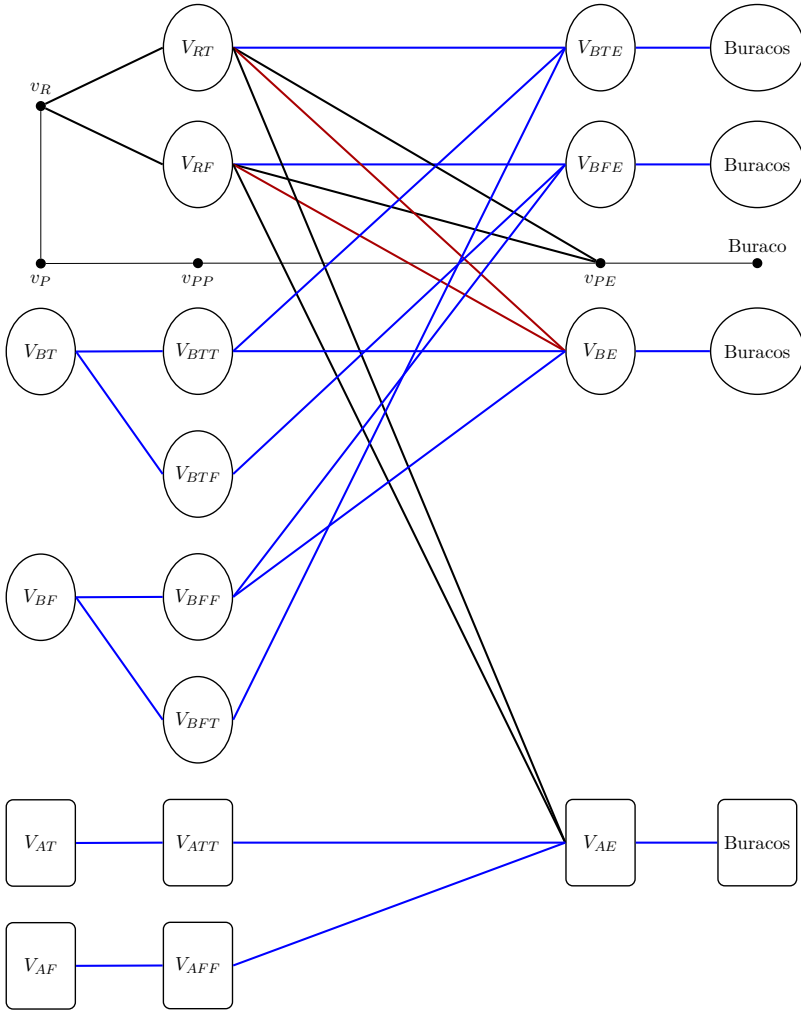


Figura 5.8: Componente associado a escolha de Bob. Cada elipse é um conjunto com k_B vértices e cada retângulo arredondado é um conjunto com k_A vértices.

A terceira componente (avaliação da fórmula) pode ser vista na Figura 5.9. Inicialmente, o ladrão está em w_R e os policiais das variáveis verdadeiras (resp. falsas) de Bob estão em seus vértices em W_{BT} (resp. W_{BF}). Analogamente, os policiais das variáveis verdadeiras (resp. falsas) de Alice estão em seus vértices em W_{AT} (resp. W_{AF}). O ladrão se move primeiro.

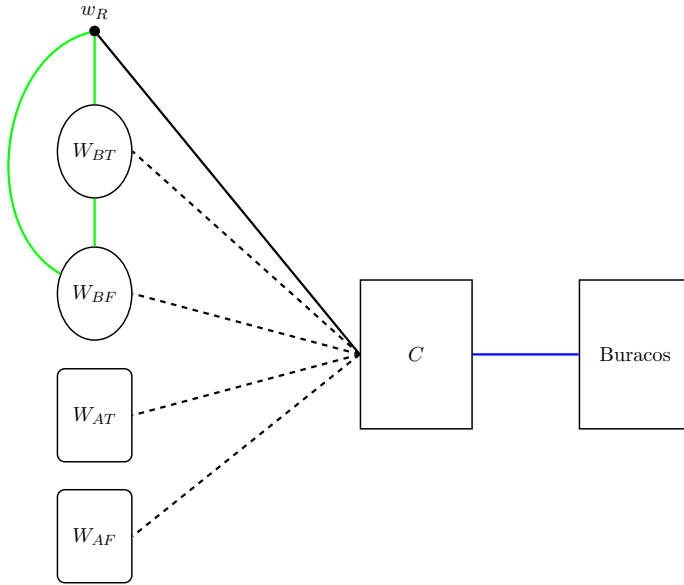


Figura 5.9: Componente de avaliação de Φ , onde W_{BT} e W_{BF} tem k_B vértices, W_{AT} e W_{AF} tem k_A vértices e todo vértice $c \in C$ representa uma cláusula de Φ e está ligado a um buraco. As linhas tracejadas indicam que todo vértice $c \in C$ é adjacente aos vértices dos literais que satisfazem a cláusula correspondente.

Observe que w_R , o primeiro vértice de W_{BT} e o primeiro vértice de W_{BF} formam uma clique. Assim, para evitar ser capturado no próximo turno pelo policial da primeira variável de Bob, o ladrão deve ir para um vértice de C . Se o ladrão conseguir fugir para um vértice de cláusula não coberto pelos policiais, ele escapa para um buraco no turno seguinte e vence a partida. Caso contrário, se todos os vértices de cláusula estiverem cobertos, os policiais capturam o ladrão.

Todos os elementos mostrados nesta prova nos dão uma boa ideia de concluí-la. Restam basicamente duas etapas:

- Vincular os valores verdade obtidos ao final da etapa de Alice ao início da etapa de Bob e vice-versa;
- Usar o policial provador para forçar que o ladrão se mova para w_R , iniciando a terceira etapa (de avaliação da fórmula Φ).

Ao conectar todas as estruturas apresentadas o leitor deve ficar atento para que o ladrão seja sempre forçado a seguir o caminho esperado em cada componente. Por exemplo, após o ladrão se mover de u_R para u'_R , como podemos impedir que o ladrão retorne a u_R no turno seguinte? Dica: Adicione algumas arestas e utilize a posição do policial provador para impedir esse tipo de movimentação do ladrão. Deixamos estas etapas finais da prova para o leitor (Exercício 5.5). ■

5.5 Exercícios

Exercício 5.1. Mostre que Bob (2° jogador) sempre vence o Jogo GEOGRAFIA com os estados brasileiros começando pela Bahia.

Exercício 5.2. Mostre que o Jogo da Coloração, o Jogo da Coloração Conexa e as variantes normal e misère do Jogo GEOGRAFIA e do Jogo de Formação de Conjunto Convexo (CSFG_g) são limitados e tem regras razoáveis (ver definição de jogo combinatório no Capítulo 1) e pertencem a PSPACE.

Exercício 5.3. Sabendo que a variante misère do Jogo CLIQUE-FORMING é PSPACE-completa, mostre que a variante misère do jogo de formação de conjunto convexo (CSFG_g) também é PSPACE-completa.

Exercício 5.4. Mostre um algoritmo de tempo exponencial que, dado um grafo G e um inteiro k , decide se $\mathcal{C}$ possui uma estratégia vencedora para $\mathcal{C}\&\mathcal{R}$ com k policiais em G .

Exercício 5.5. Complete a prova do Teorema 5.8.

Parte II

**Jogos
Combinatórios
em Grafos**

6

Jogos de Convexidade em Grafos

“We propose three types of achievement and avoidance games involving convex hull, geodesic hull, and geodesics from a point to a set of points; this leads to several unsolved problems”

Frank Harary, 1984, sobre jogos de convexidade em grafos

Convexidade é um tema clássico, estudado em muitas áreas diferentes da Matemática. No entanto, o estudo de convexidade aplicada a grafos começou apenas nos anos 1970. Paul Erdős, um dos matemáticos mais prolíficos da história, publicou com outros autores um dos primeiros artigos de convexidade em grafos, focado em torneios¹ (Erdős, Fried et al. 1972). Para mais detalhes, recomendamos o livro *Introduction to Graph Convexity* de J. Araújo et al. (2025). De acordo com Duchet (1987), o primeiro artigo explicitamente de convexidade em grafos gerais em inglês é o artigo “Convexity in graphs” de Harary e Nieminem (1981). Apenas 3 anos depois, um de seus autores, Frank Harary (1984), reconhecido como um dos pais da teoria moderna de grafos, introduziu os primeiros jogos de convexidade em grafos.

Depois disso, a linha de pesquisa em jogos de convexidade em grafos se desenvolveu e obteve vários resultados (Buckley e Harary 1985a; Buckley e Harary 1985b; Nečásková 1988; Haynes, Henning e Tiller 2003). S. N. Araújo et al. (2024) mostraram a relação entre jogos de convexidade em árvores e a Teoria de Sprague-Grundy (Capítulo 2). Dailly, Gahlawat e Myint (2024) estenderam esse resultado de árvores para outras classes de grafos, como os cacti. Benesh et al. (2025) obtiveram resultados sobre o jogo do

¹ Grafos direcionados obtidos da orientação das arestas de um grafo completo.

fecho convexo considerando diversas famílias de grafos. Finalmente, S. N. Araújo et al. (2025) introduziram variantes partizan de jogos de convexidade e obtiveram resultados em árvores a partir da Teoria Combinatória dos Jogos (Capítulo 10).

Antes de definir os jogos de convexidade, é importante relembrar o conceito de convexidade em geometria e sua extensão para grafos. Intuitivamente, convexidade pode ser vista como uma propriedade que caracteriza conjuntos “completos” ou “preenchidos” em relação a alguma operação.

Convexidade em Espaços Euclidianos: Na geometria euclidiana, um conjunto S de pontos em um espaço é *convexo* se, para quaisquer dois pontos $A, B \in S$, todo ponto no segmento de reta entre A e B pertence a S . Isso significa que nenhum segmento ligando dois pontos de S sai de S . Como exemplo, temos círculos, polígonos convexos (como triângulos e quadrados), esferas e poliedros convexos (como pirâmides e cubos).



Figura 6.1: Conjuntos convexo (a) e não convexo (b) em espaços euclidianos

Convexidade em Grafos: Na teoria dos grafos, um conjunto S de vértices em um grafo G é *convexo* se, para quaisquer dois vértices $A, B \in S$, todo vértice em um caminho mínimo (geodésica) entre A e B pertence a S . Esse tipo de convexidade em grafos é a mais estudada e se chama *convexidade geodésica*². Os segmentos de reta (caminhos mínimos entre dois pontos) da geometria são substituídos por geodésicas (caminhos mínimos entre dois vértices) em grafos. Veremos depois outros tipos de convexidade em grafos, como a monofônica e a P_3 , considerando outros tipos de caminhos.

O *fecho convexo* (*convex hull*) de um conjunto S é o menor conjunto convexo que contém S . Ver exemplo da Figura 6.2(b), onde o contorno marrom mostra o fecho convexo do conjunto S em azul.

² Alguns autores usam o termo “geodético” em vez de “geodésico”, mas outros, como van de Vel (1993) e J. Araújo et al. (2025), evitam esse termo.



Figura 6.2: $S = \{v_1, v_2\}$ é convexo em (a) e não convexo em (b). Os vértices de S estão em azul. O contorno marrom mostra o fecho convexo de S .

6.1 Primeiros jogos de convexidade geodésica

Dado um grafo G e $S \subseteq V(G)$, seja o **intervalo** (geodésico) $I_g(S)$ o conjunto formado por S e todo vértice em algum caminho mínimo entre dois vértices de S . O subscrito g é para indicar que estamos na **convexidade geodésica** (que considera caminhos mínimos). Como dito antes, $S \subseteq V(G)$ é *convexo* se $I_g(S) = S$ e o *fecho convexo* (*convex hull*) de S , denotado por $\text{conv}_g(S)$, é o menor conjunto convexo que contém S e pode ser obtido iterativamente aplicando a função de intervalo $I_g(\cdot)$, começando por S , até obter um conjunto convexo (J. Araújo et al. 2025). Ou seja:

$$\text{conv}_g(S) = \bigcup_{k=0}^{\infty} I_g^k(S),$$

onde $I_g^0(S) = S$ e $I_g^{k+1}(S) = I_g(I_g^k(S))$. O processo termina quando um conjunto convexo é alcançado, isto é, $I_g^k(S) = I_g^{k+1}(S)$. Além disso, dizemos que S é um *conjunto de envoltória* (*hull set*) se $\text{conv}_g(S) = V(G)$.

Jogos de Convexidade em Grafos. Os primeiros jogos de convexidade, propostos por Harary (1984), Buckley e Harary (1985a) e Buckley e Harary (1985b), são quatro: HG_g (*hull game*), IG_g (*interval game*), CHG_g (*closed hull game*) e CIG_g (*closed interval game*). A seguir, apresentamos as regras de cada um desses jogos, e usamos a Figura 6.3 para exemplos. IG_g e CIG_g são chamados de jogos de intervalo, e HG_g e CHG_g são chamados de jogos de envoltória.

Nesses jogos, Alice e Bob se alternam (Alice primeiro) selecionando em cada jogada um vértice de um grafo dado G , obedecendo às seguintes regras, onde S é o conjunto de vértices selecionados no jogo (inicialmente vazio). Há funções $f_1(S)$ e $f_2(S)$, que são conjuntos de vértices que dependem

do jogo considerado e determinarão as condições de escolha dos vértices e término do jogo. Em cada turno, o jogador seleciona um vértice que não está em $f_1(S)$ e o adiciona a S . O jogo termina quando $f_2(S) = V(G)$. Os quatro jogos de convexidade se diferenciam pelo seguinte:

- No jogo IG_g : $f_1(S) = S$ e $f_2(S) = I_g(S)$;
- No jogo HG_g : $f_1(S) = S$ e $f_2(S) = \text{conv}_g(S)$;
- No jogo CIG_g : $f_1(S) = f_2(S) = I_g(S)$.
- No jogo CHG_g : $f_1(S) = f_2(S) = \text{conv}_g(S)$;

Existem três variantes principais desses quatro jogos, com diferentes critérios de vitória: jogo normal (o último a jogar vence), jogo misère (o último a jogar perde) e jogo de otimização (em que Alice deseja minimizar e Bob deseja maximizar o número de vértices selecionados). Note que esses jogos são imparciais e sem empate.

Note que vértices simpliciais³ não fazem parte de nenhum caminho mínimo entre outros vértices, pois sua vizinhança forma uma clique. Por isso, nos quatro jogos de convexidade, os vértices simpliciais devem sempre ser escolhidos por algum jogador. Em árvores, todo vértice interno está num caminho mínimo entre duas folhas (que são os vértices simpliciais da árvore). Por isso, nas árvores T_1 e T_2 da Figura 6.3, os jogos terminam quando as três folhas x_1 , v_1 e v'_1 forem selecionadas. Esse fato leva a diferentes estratégias vencedoras para cada um desses jogos em árvores.

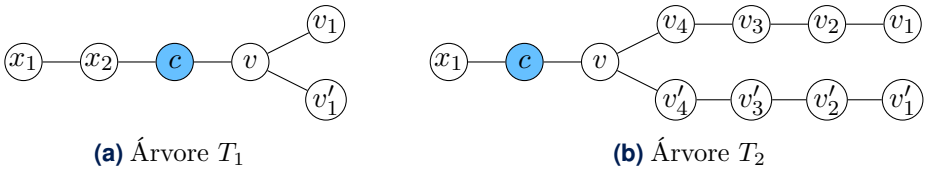


Figura 6.3

Exemplo do Jogo IG_g . Como exemplo do **jogo do intervalo** IG_g , considere a árvore T_1 da Figura 6.3a. Uma possível sequência de jogadas durante o jogo (com Alice e Bob se alternando) seria: $v_1 - x_2 - c - v - x_1 - v'_1$.

³ Definido no Capítulo A.

Note que, apesar de c estar no caminho mínimo entre v_1 e x_2 , ele pode ser selecionado no jogo IG_g (mas não poderia no jogo CIG_g). No jogo normal em T_1 , Bob consegue vencer, forçando Alice a selecionar a penúltima folha não selecionada x_1 e em seguida selecionando a última folha v'_1 . No jogo *misère*, Alice vence forçando Bob a selecionar a última folha v'_1 . No jogo de otimização, o número mínimo de vértices selecionados é 5, Alice priorizando folhas da árvore, como na sequência $x_1 - x_2 - v_1 - v - v'_1$.

Resumindo, na variante normal de IG_g em uma árvore, os jogadores evitam rotular as duas últimas folhas até que possam forçar o oponente a escolher a penúltima folha, garantindo a possibilidade de ganhar o jogo rotulando a última folha. Na variante *misère*, os jogadores evitam rotular a última folha, pois aquele que o fizer perde o jogo. Na variante de otimização, Alice joga somente em folhas e Bob tenta evitar folhas, resultando em $\min\{2f - 1, n\}$ vértices selecionados, onde f é o número de folhas.

Com isso, a paridade do número de vértices nas árvores define o vencedor nas variantes normal e *misère*. Como T_1 (resp. T_2) tem um número par (resp. ímpar) de vértices, Alice (resp. Bob) perde na variante normal e vence na variante *misère*.

Exemplo do Jogo CIG_g . No jogo do intervalo fechado CIG_g , os jogadores não podem selecionar vértices que pertencem ao intervalo dos vértices já selecionados no jogo. Como exemplo, considere novamente a árvore T_1 da Figura 6.3a na variante normal (último a jogar vence). Alice vence com a seguinte estratégia: Na sua primeira jogada, Alice rotula o vértice c . A partir desse momento, ela seguirá a seguinte estratégia para responder às escolhas de Bob:

- Se Bob escolher x_1 , Alice escolhe v (e vice-versa), proibindo o vértice x_2 , pois pertence ao caminho entre x_1 e c . Depois disso, sobram v_1 e v'_1 e Alice consegue jogar por último.
- Se Bob escolher x_2 , Alice escolhe v_1 , proibindo o vértice v , pois pertence ao caminho entre v_1 e c . Depois disso, sobram x_1 e v'_1 e Alice consegue jogar por último.
- Se Bob escolher v_1 ou v'_1 , Alice escolhe x_2 , proibindo o vértice v como antes. Depois disso, sobram x_1 e um vértice em $\{v_1, v'_1\}$, e Alice consegue jogar por último.

Com essa estratégia, Alice sempre força Bob a não rotular o último vértice. Duas sequências possíveis de vitória para Alice são:

$$c - x_1 - v - v_1 - v'_1 \quad \text{e} \quad c - x_2 - v_1 - v'_1 - x_1$$

Na árvore T_2 da Figura 6.3b, Alice também possui uma estratégia vencedora na variante normal ao rotular o vértice c na sua primeira jogada. Entretanto, sua estratégia em T_2 é mais complicada, estando diretamente relacionada ao clássico jogo NIM, visto nos Capítulos 1 e 2. Mostramos essa relação na seção seguinte.

6.2 Nimbers do jogo CIG_g de Intervalo

Para mostrar a relação entre esses jogos na variante normal, seja iCIG_g (*initialized* CIG_g) o jogo em que a instância consiste de um grafo G e um vértice v de G e o jogo é quase igual ao CIG_g , sendo a única diferença o fato de que v já está selecionado antes do início do jogo. Ou seja, o conjunto S de vértices selecionados não começa $S = \emptyset$, mas $S = \{v\}$.

Como exemplo inicial, considere o jogo iCIG_g com instância (P_{n+1}, p_0) , onde o caminho P_{n+1} tem vértices $p_0, p_1, \dots, p_n$. Lembre-se de que o vértice p_0 está selecionado no início. Isso significa que, se o primeiro jogador escolher o vértice p_k , os vértices p_1 a p_k estarão proibidos. Isso está diretamente relacionado a uma pilha do jogo NIM com n objetos: a escolha de p_k na primeira jogada é equivalente a remoção de k objetos. Desse modo, o nimber da instância (P_{n+1}, p_0) é igual a n .

Vamos elaborar mais esse exemplo. Considere as florestas T'_1 e T'_2 da Figura 6.4 em que os vértices azuis já estão selecionados. Com isso, pela Teoria de Sprague-Grundy (Capítulo 2), a floresta T'_1 tem nimber $1 \oplus 1 \oplus 3 = 3$ e a floresta T'_2 tem nimber $2 \oplus 4 \oplus 4 = 2$. Ambas são posições vencedoras para o primeiro jogador em iCIG_g , tanto na variante normal quanto na variante *misère*.

Esse fato sobre o jogo iCIG_g tem repercussão sobre o jogo CIG_g : se Alice selecionar o vértice v no jogo original CIG_g nas árvores T_1 e T_2 da Figura 6.3, ela perde, pois teremos posições equivalentes às das florestas T'_1 e T'_2 da Figura 6.4 no jogo iCIG_g . Como o próximo a jogar é Bob e o primeiro a jogar em T'_1 e T'_2 vence, então Alice perde. Resumindo, Alice não deve jogar no vértice v das árvores T_1 nem T_2 no jogo CIG_g .

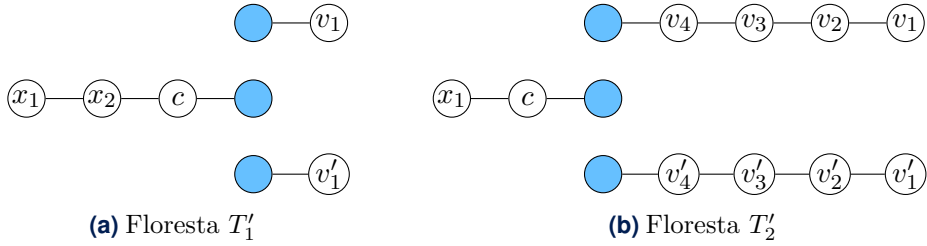


Figura 6.4: Posições obtidas após o primeiro movimento de Alice no vértice v , em vez de c , nas árvores T_1 e T_2 da Figura 6.3 no CHG_g . Bob tem uma estratégia vencedora após esse primeiro movimento ruim de Alice nas variantes normal e misère.

Apesar de perder jogando no vértice v das árvores T_1 e T_2 da Figura 6.3, Alice vence jogando no vértice c . A Figura 6.5 mostra isso para T_1 e T_2 e também para outras duas árvores. O cálculo do nimber mostrado em vermelho na figura é a ideia central da prova do próximo teorema.

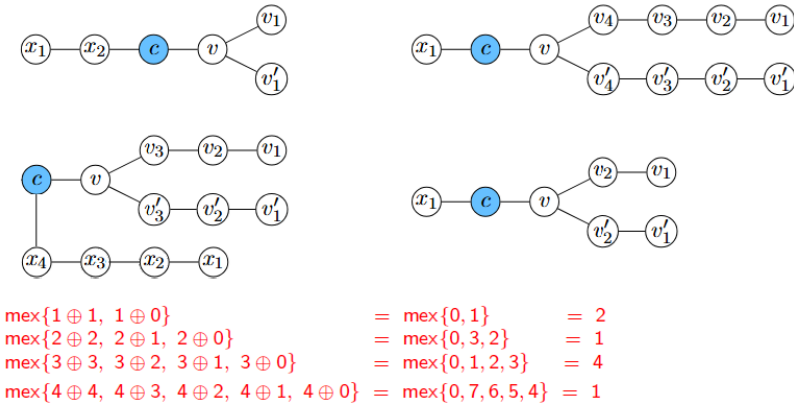


Figura 6.5: Posições obtidas após o primeiro movimento de Alice em c em 4 árvores, incluindo T_1 e T_2 da Figura 6.3. Alice vence de acordo com o cálculo dos nimbers (em vermelho) da parte direita das árvores.

No teorema a seguir, usamos a teoria de Sprague-Grundy vista na Seção 2.3 para resolver o jogo CHG_g .

Teorema 6.1 (S. N. Araújo et al. 2024). *O problema de decisão do jogo CIG_g pode ser resolvido em tempo linear em árvores, tanto na variante normal como misère.*

Demonstração. Vamos começar com o jogo iCIG_g sobre uma árvore T e um vértice v inicialmente selecionado. Como T é uma árvore, podemos assumir que, sempre que um novo vértice w é selecionado, todo vértice no caminho entre v e w também é selecionado. Isso porque existe um único caminho mínimo entre quaisquer dois vértices em uma árvore. Se v é o único vértice de T , então o nimber de (T, v) é zero, pois não há vértices disponíveis, e Alice perde na variante normal, mas vence na variante *misère*.

Seja então u um vizinho de v . Denotamos por (T, v, u) a instância $(T_{v,u}, v)$ de iCIG_g , onde $T_{v,u}$ é a subárvore de T contendo v obtida após a remoção de todas as arestas de v , exceto vu (portanto, v é uma folha de $T_{v,u}$). Vamos calcular o nimber de (T, v, u) . Sejam $u_1, \dots, u_k$ os vizinhos de u diferentes de v . Se dábemos o nimber h_i de (T, u, u_i) para cada i , então podemos aplicar a Teoria de Sprague-Grundy para determinar o nimber da posição resultante. Em particular, se Alice seleciona u , os jogos resultantes em $(T, u, u_1), \dots, (T, u, u_k)$ se tornam independentes e a posição resultante tem nimber $h_1 \oplus \dots \oplus h_k$. Se Alice rotula um vértice w_i em (T, u, u_i) diferente de u , então u também será selecionado e os jogos continuam independentes. Se h'_i é o nimber da nova posição em (T, u, u_i) , temos que a posição resultante em (T, v, u) tem nimber $h_1 \oplus \dots \oplus h'_i \oplus \dots \oplus h_k$, onde $h'_i \in \{0, 1, \dots, h_i - 1\}$. Portanto, pela Teoria de Sprague-Grundy, o nimber de (T, v, u) é igual a $\text{mex}(N)$, onde N é o conjunto de todos os valores possíveis de nimber $h'_1 \oplus \dots \oplus h'_k$, onde $h'_i = h_i$ para todo i exceto no máximo um $h'_i \in \{0, \dots, h_i - 1\}$.

No caso da instância (T, v) do jogo iCIG_g , o cálculo do nimber segue uma estratégia similar. Obtemos os valores ℓ_i para cada (T, v, v_i) e como os jogos são independentes, o nimber de (T, v) é $h = \ell_1 \oplus \dots \oplus \ell_k$.

No caso da instância T do jogo CIG_g , temos que o nimber é igual a $\text{mex}(H)$, onde H é o conjunto de nimbers de todas as posições (T, v) de iCIG_g para qualquer $v \in V(T)$. O Exercício 6.1 pede para terminar a prova argumentando porque o cálculo do nimber é o suficiente e como isso pode ser feito em tempo linear. ■

Com isso, parece mais provável Alice vencer em árvores, pois pode testar todas as possibilidades da 1ª jogada procurando nimber igual a 0. Assim, surge uma questão natural: Em qual tipo de árvores Bob consegue vencer? O teorema abaixo mostra uma classe grande de árvores simétricas em que Bob vence o jogo CIG_g nas variantes normal e *misère*.

Teorema 6.2. *Seja T' uma árvore com vértices $v'_1, \dots, v'_n$ para $n \geq 2$ e seja T'' uma cópia de T' com vértices $v''_1, \dots, v''_n$. Para $i \in \{1, \dots, n\}$, seja T_i a árvore obtida de T' e T'' adicionando a aresta $v'_i v''_i$. Então Bob vence as variantes normal e misère do jogo CIG_g em cada árvore T_i .*

Demonstração. Exercício 6.3 ■

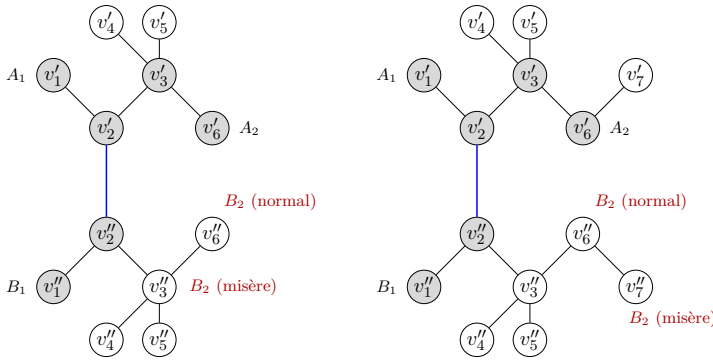


Figura 6.6: Exemplo de duas árvores simétricas do Teorema 6.2. Bob vence tanto as variantes normal e misère em ambas. A_1, A_2, B_1, B_2 indicam a primeira e segunda jogadas de Alice e Bob, respectivamente.

No exemplo da Figura 6.6, se Alice escolhe v'_1 na 1ª jogada, Bob escolhe v''_1 e então v'_2 e v''_2 não podem mais ser escolhidos. Suponha que Alice selecione v'_6 na 2ª jogada (e então v'_3 não pode mais ser escolhido). Na variante normal, Bob escolhe v''_6 . Na variante misère, Bob percebe que escolher v''_6 irá gerar subárvores não-selecionadas de tamanho 1 e então, ao invés de v''_6 , ele escolhe o vizinho de v''_6 tal que esse número de subárvores de tamanho 1 seja ímpar (v''_3 na 1ª árvore e v''_7 na 2ª árvore da Figura 6.6).

O Teorema 6.1 para árvores é estendido com técnicas semelhantes para grafos de blocos e cacti por Dailly, Gahlawat e Myint (2024).

6.3 Nimbers do jogo HG_g de Envoltória

O jogo HG_g foi estudado recentemente por Benesh et al. (2025) e S. N. Araújo et al. (2024). Nesta seção, mostramos alguns de seus resultados. Dado um grafo G , denotamos por $\mathcal{H}_g(G)$ a família de conjuntos de envoltória minimais de G (*minimal hull sets*) na convexidade geodésica, ou

seja, conjuntos minimais cujo fecho convexo é o grafo inteiro. A Figura 6.7 apresenta os grafos C_4 e P_4 com seus conjuntos $\mathcal{H}_g(G)$.



Figura 6.7: Ilustração dos conjuntos $\mathcal{H}(C_4)$ composto por $\{v_1, v_3\}$ e $\{v_2, v_4\}$, e $\mathcal{H}(P_4)$ contém apenas $\{v_1, v_4\}$.

O teorema abaixo mostra uma condição natural para grafos com um único conjunto de envoltória minimal e um exemplo para grafos split completos, definido abaixo. A operação de junção (*join*) $G_1 + G_2$ de dois grafos disjuntos G_1 e G_2 consiste em incluir todas as arestas possíveis v_1v_2 em que $v_1 \in V(G_1)$ e $v_2 \in V(G_2)$. Um grafo é *split completo* se é do tipo $K_m + \overline{K_n}$ (junção do grafo completo K_m e do complemento $\overline{K_n}$).

Teorema 6.3 (Benesh et al. 2025). *Se o conjunto S de vértices simpliciais de G é um conjunto de envoltória, então $\mathcal{H}_g(G) = \{S\}$. Portanto, se G é um grafo split completo $K_m + \overline{K_n}$ com $n \geq 2$, então, $\mathcal{H}_g(G) = \{V(\overline{K_n})\}$.*

Demonstração. Seja $A \in \mathcal{H}_g(G)$ um conjunto de envoltória minimal. Note que na convexidade geodésica, todo conjunto de envoltória deve conter todos os vértices simpliciais. Portanto, $S \subseteq A$ e, como S é minimal, então A não pode ser maior que S . Logo, $A = S$. Os vértices de $\overline{K_n}$ são simpliciais em G e formam um conjunto de envoltória. Portanto, $\mathcal{H}_g(G) = \{V(\overline{K_n})\}$. ■

Esse resultado é estendido no teorema abaixo para grafos ptolemaicos, onde um grafo é *ptolemaico* se é cordal (todo ciclo induzido é um triângulo) e distância-hereditária (todo caminho induzido é mínimo). Sabe-se também que um grafo é ptolemaico se e só se, para cada duas cliques maximais que se intersectam, sua interseção é um separador que desconecta as duas cliques. Em um *grafo de blocos*, essa interseção de duas cliques maximais consiste apenas de um vértice que separa as duas cliques. Todo grafo split (não necessariamente completo) e todo grafo de blocos é ptolemaico. Ver exemplo da Figura 6.8.

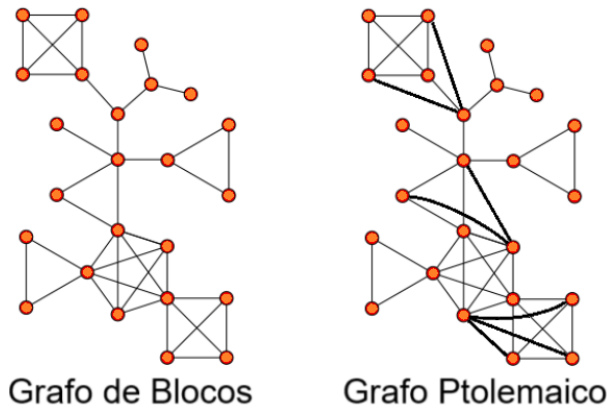


Figura 6.8: Exemplo de grafo de blocos e de grafo ptolemaico. Todo grafo de blocos é ptolemaico.

Teorema 6.4 (S. N. Araújo et al. 2024). *Seja G um grafo ptolemaico. Então Alice vence IG_g e HG_g se e só se n é ímpar na variante normal ou n é par na variante misère.*

Demonstração. O resultado para HG_g segue do fato de que o conjunto de vértices simpliciais em qualquer grafo ptolemaico é um conjunto de envoltória (Farber e Jamison 1986). O resultado para IG_g segue do fato de que grafos ptolemaicos são cordais e distância-hereditária, e que todo vértice de um grafo cordal está num caminho induzido entre dois vértices simpliciais e todo caminho induzido é mínimo em um grafo distância-hereditária. ■

Benesh et al. (2025) também calculou o nimber do jogo HG_g em várias classes de grafos, resumidos na Tabela 6.1, tanto para variante normal como misère.

6.4 Jogos de Envoltória são PSPACE-completos

É fácil verificar que os quatro jogos IG_g , HG_g , CIG_g e CHG_g estão em PSPACE, tanto na variante normal, como misère e de otimização, pelo Teorema 5.1 por serem jogos limitados (ver definição no Capítulo 5).

Com relação à PSPACE-completude, a complexidade dos jogos IG_g e CIG_g de intervalo geodésico permanece em aberto, nas 3 variantes (normal, misère e de otimização). Recentemente, S. N. Araújo et al. (2024)

Tabela 6.1: Nimbers do jogo HG_g em diferentes classes de grafos, onde $\text{imp}(k) = k \bmod 2$ indica se k é ímpar e, num grafo multipartido completo, σ e λ são os números de partes com 1 vértice e com mais de 1 vértice, resp.

Classe	Restrições	number (normal)	number (misère)
Split $K_m + \overline{K_n}$	$m \geq 1, n \geq 2$	$\text{imp}(V(G))$	$1 - \text{imp}(V(G))$
Bloco G		$\text{imp}(V(G))$	$1 - \text{imp}(V(G))$
Ciclo C_n	$n \equiv_4 1, 2$	$\text{imp}(n)$	1
	$n \equiv_4 3, 0$		0
Hipercubo Q_n	$n \geq 2$	0	0
Grade $P_m \square P_n$	$2 = m \leq n$	$\text{imp}(mn)$	0
	$3 \leq m \leq n$		$2 \cdot \text{imp}(m + n)$
Multipartido Completo $K_{m_1, \dots, m_k}$	$\lambda \in \{0, 1\}$	$\text{imp}(V(G))$	$1 - \text{imp}(V(G))$
	$2 \leq \lambda \equiv_2 0$	$2 \cdot \text{imp}(\sigma)$	$\text{imp}(\lambda + \sigma)$
	$2 \leq \lambda \equiv_2 1$	$\text{imp}(\sigma)$	
Roda Gen. $W_{m,n}$	$m = 1, n = 4$	2	$1 - \text{imp}(V(G))$
	$m = 1, n \geq 4$	$\text{imp}(V(G))$	
	$m \geq 2, n = 3$		
	$m \geq 2, n \geq 4$	0	1

provaram que os jogos HG_g e CHG_g de envoltória são PSPACE-completos, nas variantes normal e misère, com reduções semelhantes a do Teorema 5.4 sobre o Jogo de Formação de Conjunto Convexo (CSFG_g).

Teorema 6.5 (S. N. Araújo et al. 2024). HG_g e CHG_g são PSPACE-completos nas variantes normal e misère, mesmo em grafos com diâmetro dois.

Demonstração. Deixamos a prova da variante misère como Exercício 6.2, por ser muito mais fácil e quase igual a do Teorema 5.4.

Considere então, para a variante normal de HG_g , a mesma redução do Teorema 5.4 a partir do jogo CLIQUE-FORMING, que por simplicidade também chamaremos de JFC (Jogo de Formação de Cliques), com instância H , mas adicionando a G quatro novos vértices w_1, w'_1, w_2 e w'_2 , de modo que $N[w_1] = N[w'_1]$ e $N[w_2] = N[w'_2]$. Veja a Figura 6.9. Note que G tem diâmetro 2.

No jogo HG_g , se o conjunto S de vértices selecionados é uma clique, diremos que estamos na Fase 1; caso contrário, estamos na Fase 2.

Suponha que Alice vence JFC em H na variante normal. Considere que o jogo está na Fase 1. Então Alice joga HG_g em G de acordo com sua estratégia vencedora nos vértices de H . Então o primeiro vértice selecionado

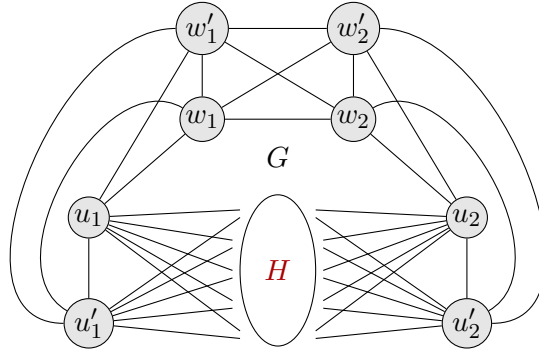


Figura 6.9: Grafo da redução do Teorema 6.5 para a variante normal.

v_0 pertence a H . Se Bob escolhe um dos vértices u_1 ou u'_1 (resp. u_2 ou u'_2), Alice escolhe w_2 (resp. w'_2), vencendo pois $\text{conv}_g(\{v_0, u_1, w_2\}) = V(G)$. Agora considere que estamos na Fase 2. Se Bob escolhe w_1 ou w'_1 (resp. w_2 ou w'_2), Alice escolhe w_2 (resp. w_1), vencendo, pois $\text{conv}_g(\{v_0, w_1, w_2\}) = V(G)$. Além disso, se Bob escolhe um vértice v_j de H e existe um vértice selecionado não-adjacente v_i em H , então Alice escolhe w_1 ou w_2 , vencendo, pois $\text{conv}_g(\{v_i, v_j, w_1\}) = \text{conv}_g(\{v_i, v_j, w_2\}) = V(G)$. Com isso, Alice sempre joga por último e vence.

Agora suponha que Bob vence JFC em H na variante normal. Considere que o primeiro vértice x selecionado por Alice não está em H . Então Bob escolhe o gêmeo x' de x (vértice com mesma vizinhança fechada). Na segunda jogada de Bob, ele seleciona w_1 se $S \subseteq \{u_2, u'_2\} \cup V(H)$, ou seleciona w_2 se $S \subseteq \{u_1, u'_1\} \cup V(H)$, ou seleciona u_1 se $S \subseteq \{w_2, w'_2\} \cup V(H)$ ou $S \subseteq \{u_2, u'_2, w_1, w'_1\}$ ou $S \subseteq \{u_2, u'_2, w_2, w'_2\}$, ou seleciona u_2 se $S \subseteq \{w_1, w'_1\} \cup V(H)$ ou $S \subseteq \{u_1, u'_1, w_1, w'_1\}$ ou $S \subseteq \{u_1, u'_1, w_2, w'_2\}$, vencendo imediatamente. Finalmente, considere que o primeiro vértice selecionado por Alice está em H . Então, os mesmos argumentos do parágrafo anterior podem ser usados trocando os papéis de Alice e Bob. Com isso, Bob sempre joga por último e vence.

Não é difícil verificar que os argumentos dessa prova também são válidos para o jogo CHG_g . ■

6.5 Últimos jogos de convexidade geodésica

Recentemente, dois novos jogos de convexidade têm sido investigados na literatura: o Jogo da Posição Geral (GPG_g : *General Position Game*), introduzido por Klavžar, Neethu P. K. e Chandran S. V. (2022), e o Jogo de Formação de Conjunto Convexo (CSFG_g : *Convex Set Forming Game*), introduzido por Brosse et al. (2025), já comentado no Teorema 5.4.

No jogo GPG_g , Alice e Bob selecionam vértices de um grafo de modo que o conjunto de vértices selecionados esteja em posição geral geodésica, ou seja, não pode haver três vértices selecionados x , y e z tais que $y \in I_g(\{x, z\})$. No jogo CSFG_g , Alice e Bob selecionam vértices de um grafo de modo que o conjunto de vértices selecionados seja sempre convexo (geodesicamente).

Resultados do jogo GPG_g

O jogo GPG_g (da Posição Geral Geodésica) é baseado no PROBLEMA DA POSIÇÃO GERAL de encontrar o maior conjunto de vértices de um grafo em posição geral (sem três vértices em um caminho mínimo), que, por sua vez, é uma generalização do famoso problema “*No-three-in-line*”⁴ sobre a grade $m \times m$, que continua em aberto para $m > 46$ (Flammenkamp 1998).

No teorema abaixo, fazemos reduções de JFC (Jogo de Formação de Clique) tanto na variante normal como na variante *misère*, que são PSPACE-completas (Schaefer 1978; Chandran S. V. et al. 2024).

Teorema 6.6 (Chandran S. V. et al. 2024). *O jogo GPG_g da Posição Geral Geodésica é PSPACE-completo mesmo em grafos com diâmetro 4, tanto na variante normal como *misère*.*

Demonstração. É fácil ver que são jogos limitados e portanto estão em PSPACE. Vamos obter uma redução de JFC (Jogo de Formação de Clique) para GPG_g na variante normal. Seja H uma instância de JFC com $V(H) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Vamos construir um grafo G tal que Alice vence GPG_g na variante normal em G se e só se Bob vence JFC em H .

⁴ Definido inicialmente como *Puzzle with Pawns* no livro de Dudeney (1917), apresentado pela prestigiada revista Nature no artigo “*Amusements in Mathematics*” (1917).

Seja G o grafo obtido de H incluindo um novo vértice u vizinho de todo vértice de H e um novo vértice a_i (“amigo” de v_i) para todo vértice v_i de H , cujo único vizinho é v_i . Note que G tem diâmetro 4 (Figure 6.10).

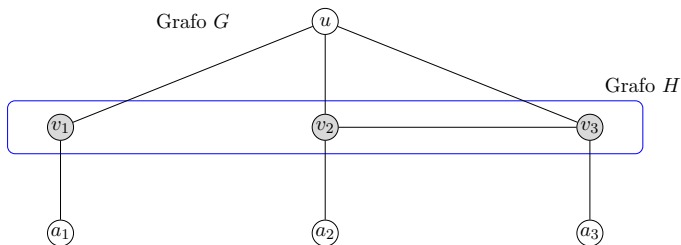


Figura 6.10: Redução de JFC para GPG_g (normal), onde H tem vértices v_i . Alice vence GPG_g em G se e só se Bob vence JFC em H .

Se Alice seleciona v_i (resp. a_i) em sua primeira jogada no jogo em G , Bob vence imediatamente selecionando a_i (resp. v_i), pois todo caminho mínimo para a_i passa por v_i . Logo podemos assumir que Alice seleciona u em sua primeira jogada. Depois disso, considere v_i e v_j não adjacentes. Note que não é possível selecionar durante o jogo $x_i \in \{v_i, a_i\}$ e $x_j \in \{v_j, a_j\}$, pois o caminho mínimo de x_i a x_j passa por u . Também não podem selecionar v_i e a_i , pois $u - v_i - a_i$ é um caminho mínimo.

Seja C o seguinte conjunto de vértices durante o jogo: se v_i ou a_i foi selecionado em GPG_g , adicione v_i a C . Vimos então que C é sempre uma clique de H e podemos assumir que os jogadores só selecionam vértices de H depois da primeira jogada de Alice (em u), pois jogar em a_i é essencialmente o mesmo que jogar em v_i .

Portanto, se Bob vence JFC em H , então Alice vence GPG_g em G , pois Alice será a segunda a jogar em H . Além disso, se Alice vence JFC em H , então Bob vence GPG_g em G , pois será o primeiro a jogar em H .

Para a variante *misère*, a redução é um pouco mais complicada, ilustrada na Figura 6.11, e é deixada como Exercício 6.4. ■

Resultados do jogo CSFG_g

A variante mais investigada por Brosse et al. (2025) foi a de otimização, em que Alice deseja maximizar o número de vértices selecionados e Bob deseja minimizar. Seja $\text{gcn}(G)$ (*game convexity number*) o número jogo

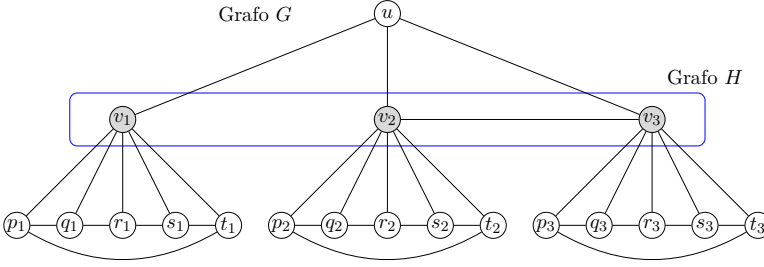


Figura 6.11: Redução de JFC misère para GPG_g misère. Alice vence GPG_g misère em G se e só se Bob vence JFC misère em H .

de convexidade, que é o maior inteiro k tal que Alice garanta k vértices selecionados no final do jogo.

Um grafo é *convexável* (do inglês, *convexable*) se $gc(G) = |V(G)|$, ou seja, Alice consegue forçar a seleção de todos os vértices durante o jogo. Brosse et al. (2025) provaram que todo grafo convexável é cordal. O lema abaixo e a Figura 6.12 mostram exemplos de grafos cordais convexáveis e de grafos cordais não convexáveis, onde os grafos F_k e F'_k são obtidos do caminho P_k adicionando 1 ou 2 vértices universais, respectivamente.

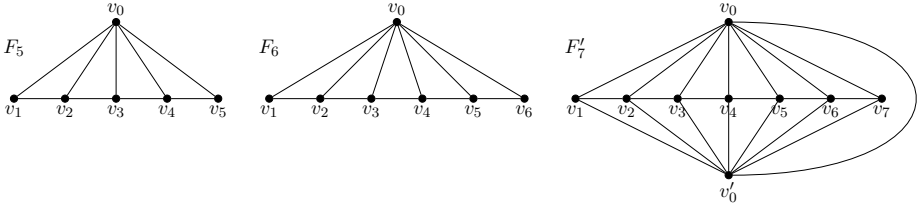


Figura 6.12: F_5 e F'_7 são convexáveis, mas F_6 não é.

Lema 6.7. F_5 e F'_7 são convexáveis, mas F_k para $k \geq 6$ não é convexável.

Demonstração. No grafo F_5 , Alice primeiro seleciona v_3 e então Bob só pode selecionar v_0 , v_2 ou v_4 . Se Bob seleciona v_0 , Alice seleciona v_2 . Se Bob seleciona v_2 ou v_4 , Alice seleciona v_0 . Depois disso, note que v_1 e v_5 não podem ser selecionados antes de seus vizinhos v_2 e v_4 serem selecionados. Portanto, todos os vértices serão selecionados e F_5 é convexável.

No grafo F'_7 , Alice primeiro seleciona v_4 e então Bob só pode selecionar v_0 , v'_0 , v_3 ou v_5 . Se Bob seleciona v_0 ou v'_0 , Alice seleciona v_3 . Se Alice

seleciona v_3 ou v_5 , Bob seleciona v_0 . Depois disso, Bob é forçado a selecionar v_0 ou v'_0 , e então Alice seleciona v_3 ou v_5 em seguida. Portanto, os vértices selecionados até esse ponto são exatamente v_0, v'_0, v_3, v_4 e v_5 . Bob não pode selecionar v_1 nem v_7 . Então ele é forçado a selecionar v_2 ou v_6 , e Alice consegue garantir que todos os vértices sejam selecionados.

Agora considere o grafo F_6 . Suponha que Alice seleciona v_3 primeiro. Então Bob seleciona v_2 , Alice é forçada a selecionar v_0 e então Bob seleciona v_6 , garantindo que v_4 e v_5 não podem ser selecionados durante o jogo. Se Alice seleciona v_2 em sua primeira jogada, Bob seleciona v_3 e voltamos a mesma situação anterior. Suponha então que Alice seleciona v_1 em sua primeira jogada. Então Bob seleciona v_2 , Alice é forçada a selecionar v_0 e, em seguida, Bob seleciona v_5 , garantindo que v_3 e v_4 não podem ser selecionados durante o jogo. Analogamente, por simetria, se Alice seleciona v_4, v_5 ou v_6 em sua primeira jogada. Portanto, F_6 não é convexável. É possível estender facilmente para F_k com $k > 6$. ■

Já mencionamos que grafos ptolemaicos são os grafos cordais (todo ciclo induzido é um triângulo) e distância-hereditária (todo caminho induzido é mínimo). Note que F_k e F'_k são cordais para $k \geq 1$, mas não ptolemaicos para $k \geq 4$. O teorema abaixo resolve o jogo CSFG_g para grafos ptolemaicos nas variantes normal, misère e de otimização.

Teorema 6.8. *Seja G um grafo com n vértices. Se G é ptolemaico, então G é convexável, ou seja, $\text{gcn}(G) = n$. Além disso, Alice vence CSFG_g na variante normal (resp. misère) se e só se n é ímpar (resp. par).*

Demonstração. Seja G um grafo ptolemaico conexo. Vamos provar um resultado mais forte: para todo conjunto convexo $K \subsetneq V(G)$, existe $v \in V(G) \setminus K$ tal que $K \cup \{v\}$ é convexo. Em palavras, Alice e Bob sempre têm um vértice para jogar em seu turno.

Seja C uma componente conexa de $G - K$ e seja $S = N(C) \subseteq K$. Se $S = \{a\}$, então todo vizinho v de a em C é tal que $K \cup \{v\}$ é convexo. Então assumamos que $|S| > 1$ e sejam $a, b \in S$. Suponha inicialmente que a e b não são vizinhos e tome a e b com distância mínima. Seja P um caminho mínimo a - b e seja Q um caminho induzido a - b cujos vértices internos estão em C . Como K é convexo, então $V(P) \subseteq K$ e Q é maior que P . Se todo vértice interno de P está em $K \setminus S$, então $P \cup Q$ é um ciclo induzido com pelo menos 5 vértices, contradição, pois G é cordal. Pela minimalidade da distância entre a e b , temos que $V(P) \subseteq S$ e $P = (a, x, b)$ tem 3 vértices

para algum $x \in S$. Como G é cordal, todo vértice interno de Q é vizinho de x . Logo, $Q \cup \{x\}$ contém um F_4 induzido, contradição, pois G é ptolemaico.

Portanto, a e b são adjacentes e, conseqüentemente, S é uma clique. Sejam $c \in C$ e G' um grafo cordal obtido de G adicionando um novo vértice b vizinho de todo vértice de S . Então S é um b - c separador minimal de G' e, pelo Lema A.1, existe um vértice $v \in C$ vizinho de todo vértice de S . Logo $K \cup \{v\}$ é convexo em G . ■

Com isso, temos que todo grafo ptolemaico é convexável e todo grafo convexável é cordal, mas nem todo grafo cordal é convexável (como F_k para $k \geq 6$) e nem todo grafo convexável é ptolemaico (como F_5 e F_7'). O problema de caracterizar os grafos convexáveis permanece em aberto.

6.6 Jogos de convexidades não geodésicas

Além da convexidade geodésica, outras convexidades de grafos foram estudadas na literatura. Segundo J. Araújo et al. (2025), é possível definir uma convexidade $\mathcal{C}$ sobre um grafo $G = (V, E)$ a partir de uma função de intervalo $I_{\mathcal{C}} : 2^V \rightarrow 2^V$ satisfazendo $I_{\mathcal{C}}(\emptyset) = \emptyset$, $I_{\mathcal{C}}(S) \supseteq S$ e $I_{\mathcal{C}}(S) \subseteq I_{\mathcal{C}}(S')$ para $S \subseteq S' \subseteq V$. Como exemplo, convexidades de caminho são definidas a partir de uma família $\mathcal{P}$ de caminhos em G de modo que $I_{\mathcal{C}}(S)$ é S e mais todo vértice em um caminho de $\mathcal{P}$ entre dois vértices de S . A convexidade geodésica, a convexidade monofônica e as convexidades P_3 e P_3^* são definidas tomando $\mathcal{P}$ como a família de caminhos mínimos, de caminhos induzidos, de caminhos P_3 e de caminhos P_3 induzidos, respectivamente.

Um conjunto é *convexo na convexidade $\mathcal{C}$* se $I_{\mathcal{C}}(S) = S$, e o fecho convexo $\text{conv}_{\mathcal{C}}(S)$ é o menor conjunto convexo na convexidade $\mathcal{C}$ que contém S . Com isso, todos os jogos da convexidade geodésica vistos nas seções anteriores podem ser estendidos para qualquer convexidade $\mathcal{C}$ de grafos.

Para convexidade monofônica, usa-se o subscrito m (de monofônica) ao invés de g (de geodésica), como $I_m(S)$, $\text{conv}_m(S)$ e os jogos IG_m , CHG_m e CSFG_m . Não é difícil ver que os Teoremas de 6.1, 6.2, 6.3, 6.4 e 6.6 também valem para convexidade monofônica, substituindo os subscritos g por m , e substituindo os grafos ptolemaicos por grafos cordais no Teorema 6.4.

Também é possível considerar convexidades em grafos direcionados, onde a função de intervalo $I_{\mathcal{C}}(S)$ considera apenas caminhos direcionados. Como exemplo, seja $\vec{G}$ o grafo direcionado da Figura 6.13 no jogo iCIG_m -

PARTIZAN: jogo CIG inicializado, na convexidade monofônica, em que Alice (resp. Bob) só pode selecionar vértices rotulados A ou C (resp. B ou C).

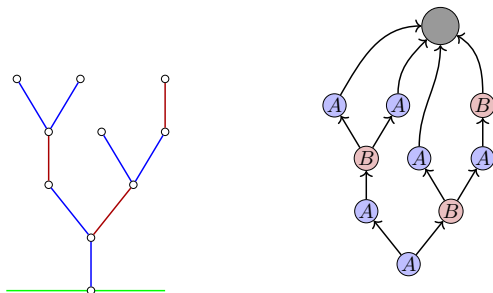


Figura 6.13: Jogo Hackenbush em árvores pode ser modelado como o jogo $iCIG_m$ -PARTIZAN em DAG com uma fonte, um sumidouro e demais vértices com grau de entrada 1, onde o sumidouro (em cor cinza) já está selecionado no início do jogo e m representa a convexidade monofônica.

É fácil ver que é possível modelar o clássico jogo Hackenbush (definido abaixo) em árvores através do jogo $iCIG_m$ -PARTIZAN em DAG's (grafos direcionados acíclicos) com uma fonte⁵, um sumidouro e demais vértices com grau de entrada 1. No jogo Hackenbush, existem pontos conectados por segmentos de linha coloridos em azul, vermelho ou verde. Alguns pontos estão no “chão”. Alice e Bob se alternam cortando segmentos. Alice (resp. Bob) só pode cortar um segmento azul (resp. vermelho) por jogada. O segmento cortado é eliminado juntamente com quaisquer outros segmentos que já não estejam ligados ao chão. O jogo segue a convenção de jogo normal: o último a jogar vence. Veja a Figura 6.13 para o exemplo de uma árvore Hackenbush e seu jogo equivalente em $iCIG_m$ -PARTIZAN sobre um DAG.

6.7 Exercícios

Exercício 6.1. Complete a prova do Teorema 6.1 e escreva o algoritmo descrito nesta demonstração.

Exercício 6.2. Prove que a variante *misère* de HG_g é PSPACE-completa.

⁵ Ver Capítulo A para terminologia de grafos direcionados.

Exercício 6.3. Prove o Teorema 6.2.

Exercício 6.4. Termine a prova do Teorema 6.6, mostrando que o Jogo da Posição Geral geodésica é PSPACE-completo na variante *misère*, usando a redução da Figura 6.11.

7

Jogos de Coloração em Grafos

“This game comes to me from its originator, Steven J. Brams, (who) conjectures that the minimum number (of colors in planar graphs) is 6”

Martin Gardner, 1981.

“The complexity of the Coloring Game is an interesting open problem”

Hans Bodlaender, 1991.

“The Coloring Game exhibits some strange properties”

Xuding Zhu, 1999.

Coloração em Grafos surgiu da famosa Conjectura das 4 Cores, proposta por Francis Guthrie em 1852, que afirmava que todo mapa pode ser colorido com 4 cores de modo que regiões vizinhas tenham cores diferentes. Guthrie passou o problema a Augustus De Morgan, um dos maiores matemáticos da época, que depois o passou a outro grande matemático, William Hamilton, mas ambos não conseguiram resolvê-lo. Em 1879, Kempe observou o Problema das 4 Cores como um problema em grafos planares, criando um vértice para cada região e uma aresta entre vértices de regiões vizinhas. Com isso, Kempe propôs uma demonstração da conjectura, que foi muito celebrada, mas que foi provada incorreta depois de 11 anos por Heawood. Apesar disso, a prova de Kempe levou ao Teorema das 5 Cores.

Formalmente, dado um grafo $G = (V, E)$ e um inteiro $k > 0$, uma k -coloração própria de G é uma função $c : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ tal que, para todo par de vértices adjacentes u e v , temos $c(u) \neq c(v)$. O número cromático de um grafo G , denotado por $\chi(G)$, é o menor k para o qual G admite uma k -coloração própria de seus vértices. A Conjectura das 4 Cores passou a ser então equivalente a mostrar que todo grafo planar

G tem $\chi(G) \leq 4$. A conjectura ficou em aberto por mais de 100 anos, tendo sido provada verdadeira por Appel e Haken (1976), na primeira prova matemática auxiliada por computador na história.

Desde então surgiram diversas variantes do problema de coloração de grafos, como coloração completa (Harary e Hedetniemi 1970; Taranchuk e Timmons 2024), b -coloração (Irving e Manlove 1999; Dettlaff et al. 2024), coloração de arestas (Holyer 1981), coloração harmoniosa (Hopcroft e Krishnamoorthy 1983; Asdre, Ioannidou e Nikolopoulos 2007) e coloração com listas (Thomassen 1995; Kaul e Mudrock 2019).

Brams propôs o primeiro jogo de coloração, o qual foi descrito por Martin Gardner (1981) em sua coluna “*Mathematical Games*” da prestigiada revista *Scientific American*. Esse jogo ficou esquecido e, depois de dez anos, Bodlaender (1991) reinventou de modo independente os primeiros jogos de coloração em grafos. Dado um grafo G e um inteiro k , Alice e Bob se alternam selecionando e colorindo um vértice não colorido de G com uma cor em $\{1, \dots, k\}$ de modo que vértices adjacentes tenham cores diferentes.

Na variante normal (resp. *misère*), o último a jogar vence (resp. perde). Na variante de otimização, Alice vence se todo vértice for colorido. Por exemplo, no triângulo K_3 usando $k = 1$ cor, Alice vence a variante normal e perde as variantes *misère* e de otimização. Usando $k = 2$ cores no K_3 , Alice vence a variante *misère* e perde as variantes normal e de otimização. Finalmente, usando $k = 3$ cores no K_3 , Alice vence as variantes normal e de otimização e perde a variante *misère*.

Para diferenciar as variantes, denotamos por “Jogo Normal de Coloração” e “Jogo *Misère* de Coloração” as variantes normal e *misère*, respectivamente. O Jogo Normal de Coloração é PSPACE-completo pelo Teorema 5.5 de Bodlaender (1991). O Jogo *Misère* de Coloração é PSPACE-completo com 1 cor por uma redução direta do jogo KAYLES-MISÈRE, provado PSPACE-completo por Chandran S. V. et al. (2024).

O termo “Jogo de Coloração” será usado para a variante de otimização, que é a mais investigada na literatura e será o tema principal deste capítulo. Nesta variante principal, define-se o *número jogo cromático* $\chi_g(G)$ como o menor número k de cores tal que Alice garanta que todo vértice de G seja colorido. Claramente $\chi(G) \leq \chi_g(G) \leq \Delta(G) + 1$ (Exercício 7.1).

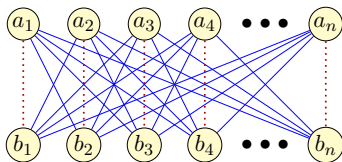


Figura 7.1: Grafo bipartido $K_{n,n}^*$: a_i é vizinho de todo b_j , exceto b_i . O grafo $K_{n,n}^{**}$ é obtido de $K_{n,n}^*$ adicionando um vértice.

7.1 Propriedades do Jogo de Coloração

Zhu (1999) afirma que o jogo de coloração “*exibe algumas propriedades estranhas*”. Por exemplo, uma suposição plausível é que Alice tem vantagem por começar o jogo. Mas, isso nem sempre é verdade. No grafo caminho P_4 , Bob pode colorir um não-vizinho do primeiro vértice de Alice como uma cor diferente, forçando 3 cores. Mas, se Alice não joga primeiro, ela pode colorir um não-vizinho do vértice de Bob com a mesma cor, forçando apenas 2 cores. A diferença do número de cores nesse exemplo é pequena (apenas 1), quando se invertem a ordem dos jogadores.

No entanto, existem grafos bipartidos em que essa diferença pode ser arbitrariamente grande. Seja $K_{n,n}^*$ o grafo obtido do grafo bipartido completo $K_{n,n}$, removendo um emparelhamento perfeito (Figura 7.1). Se Alice começa o jogo em $K_{n,n}^*$, Bob consegue forçar n cores, colorindo a_i (resp. b_i) sempre que Alice colorir b_i (resp. a_i), usando a mesma cor e impedindo que esta cor seja usada nos demais vértices. Se Bob começa, Alice vence em $K_{n,n}^*$ com apenas 2 cores, colorindo em sua primeira jogada o vértice a_i (resp. b_i), onde b_i (resp. a_i) foi o primeiro vértice colorido por Bob, usando uma cor diferente e garantindo que a cor de a_i deve ser usada em todo vértice de $\{a_1, \dots, a_n\}$ e a cor de b_i deve ser usada em todo vértice de $\{b_1, \dots, b_n\}$.

Note também que a situação se inverte no grafo $K_{n,n}^{**}$ obtido de $K_{n,n}^*$ adicionando apenas um vértice isolado. Resumidamente: $\chi_g(K_{n,n}^*) = n$, mas $\chi_g(K_{n,n}^{**}) = \chi_g(K_{n,n}) = 2$. Esse exemplo também mostra que o número jogo cromático $\chi_g(G)$, ao contrário do número cromático tradicional $\chi(G)$, não é hereditário, pois $K_{n,n}^*$ é subgrafo induzido tanto de $K_{n,n}^{**}$ como de $K_{n,n}$, mas possui número jogo cromático muito maior.

Uma outra questão interessante e aparentemente trivial é a seguinte: se Alice vence o jogo de coloração com k cores em um grafo G , então Alice

também vence com $k + 1$ cores em G ? Embora pareça óbvio que a resposta a essa pergunta seja sim (afinal mais cores deveriam ajudar Alice e não atrapalhar), até hoje não se sabe a resposta. A conjectura abaixo é uma reformulação equivalente dessa questão.

Conjectura 1 (Zhu 1999). Para qualquer $k \geq \chi_g(G)$, Alice vence o jogo de coloração em G com k cores.

7.2 Limitantes para $\chi_g(G)$

Nesta seção, vamos mostrar alguns limitantes para $\chi_g(G)$ em algumas classes de grafos. Desde sua criação, o número jogo cromático $\chi_g(G)$ atraiu considerável atenção e foi estudado por vários pesquisadores. A seguir, listamos vários limitantes e outros resultados da literatura.

Faigle et al. (1993) mostraram que $\chi_g(G) \leq 3 \cdot \omega(G) - 2$ em grafos de intervalo e provaram que $\chi_g(G) \leq 4$ em florestas. Dunn et al. (2015) caracterizaram as florestas com $\chi_g(G) = 2$ e obtiveram um algoritmo de tempo polinomial para florestas sem vértices de grau 3. Sidorowicz (2007) provou que $\chi_g(G) \leq 5$ em cacti. Dinski e Zhu (1999) provaram que $\chi_g(G) \leq k(k + 1)$ para todo grafo com número cromático acíclico k . Zhu (2000) provou que $\chi_g(G) \leq 3k + 2$ em k -árvores parciais para $k \geq 2$. Bohman, A. Frieze e Sudakov (2008) investigaram $\chi_g(G_{n,p})$ para o grafo aleatório $G_{n,p}$ de Erdős-Renyi com relação a seu comportamento assintótico. Bartnicki et al. (2008) obtiveram valores exatos para o produto cartesiano de K_2 com caminhos, ciclos e grafos completos. Em grafos planares, são conhecidos os quatro resultados a seguir. Kierstead e Trotter (1994) provaram que $\chi_g(G) \leq 7$ em grafos periplanares. Zhu (2008) provou que $\chi_g(G) \leq 17$ em grafos planares quaisquer. Sekiguchi (2014) provou que $\chi_g(G) \leq 13$ se a cintura é pelo menos 4. K. M. Nakprasit e K. Nakprasit (2018) provaram que $\chi_g(G) \leq 5$ se a cintura é pelo menos 7.

Seja $\mathcal{G}$ uma classe de grafos, para mostrar um limite superior K para $\chi_g(\mathcal{G})$, basta que se demonstre que Alice possui uma estratégia vencedora com K cores para qualquer $G \in \mathcal{G}$. Para demonstrar um limite inferior de $K + 1$ cores, demonstramos que Bob possui uma estratégia vencedora com K cores para qualquer $G \in \mathcal{G}$.

Árvores são grafos acíclicos conexos e estão entre os grafos conexos mais simples. Assim, são um bom ponto de partida para se investigar limitantes para o Jogo de Coloração.

Teorema 7.1 (Faigle et al. 1993). *Se T é uma árvore, então $\chi_g(T) \leq 4$.*

Demonstração. Vamos mostrar uma estratégia vencedora para Alice usando 4 cores em uma árvore qualquer T . Alice inicia o jogo colorindo um vértice qualquer r de T . Seja T_k a subárvore minimal de T que contém os k primeiros vértices coloridos. Note que $V(T_1) = \{r\}$.

Seja v_i o i -ésimo vértice colorido. Suponha que Bob colore v_i para um certo i . Seja P o único caminho entre r e v_i em T e seja u_i o vértice mais distante de r em $V(P) \cap V(T_{i-1})$. Alice decide qual será o vértice v_{i+1} a colorir no turno seguinte de acordo com as regras abaixo em ordem:

- R1: Se u_i não está colorido, Alice colore u_i ;
- R2: Se u_i está colorido e existe um vértice w_i não colorido em T_i , Alice colore w_i .
- R3: Se todo vértice de T_i já está colorido, Alice colore um vértice x_i não colorido e adjacente a $V(T_i)$.

Não precisamos nos preocupar com as cores exatas utilizadas nos vértices, pois, como iremos demonstrar abaixo, a estratégia de Alice garante que todo vértice não colorido tem no máximo 3 vizinhos coloridos e portanto sempre possui uma cor disponível. Seja v um vértice não colorido em determinado momento do jogo que contém três vizinhos coloridos a, b, c . Sem perda de generalidade, assuma que a, b, c foram coloridos nessa ordem, embora não necessariamente em jogadas consecutivas.

Suponha primeiro que v está no caminho entre r e a . Portanto v pertence à árvore T_i sendo i o turno em que a foi colorido. Seja $d \in \{b, c\}$ um desses dois vértices que não está no caminho entre v e r . Pelas regras, não será Alice a colorir d (pois v ainda não está colorido) e portanto, quando Bob colorir d , Alice irá colorir v pela regra R1.

Suponha agora que v não está no caminho entre r e a . Sejam T_b e T_c as subárvores de T que tem, respectivamente, b e c como raízes. Se c foi colorido por Bob, então Alice colore v em seguida pela regra R1. Se c foi colorido por Alice, então havia pelo menos um vértice colorido em T_b (e.g. b) e um vértice colorido em T_c antes da última jogada de Bob, mas neste caso v já teria sido colorido por Alice pela regra R1. ■

Muitos dos limitantes mostrados no início desta seção para o Jogo de Coloração foram obtidos a partir do *Jogo de Marcação*. Nesse jogo sobre

um grafo G e um inteiro k , Alice e Bob se alternam marcando vértices de G . Bob vence se surgir algum vértice não marcado com k vizinhos marcados; caso contrário, Alice vence. O *número jogo de coloração* $\text{col}_g(G)$ de um grafo G é o menor k tal que Alice vence o Jogo de Marcação em G .

Note que, se Alice vence o Jogo de Marcação em G com inteiro k , então ela vence o Jogo de Coloração em G com k cores. Basta ela considerar que os vértices coloridos estão marcados. Assim Alice garante que todo vértice não colorido sempre possui no máximo $k - 1$ vizinhos coloridos. Portanto $\chi_g(G) \leq \text{col}_g(G)$ para todo grafo G .

O Jogo de Marcação foi implicitamente usado na prova do Teorema 7.1 sobre árvores (Exercício 7.2). Ao contrário de $\chi_g(G)$, sabe-se que $\text{col}_g(G)$ é monotônico, isto é, $\text{col}_g(H) \leq \text{col}_g(G)$ para todo subgrafo H de G (Wu e Zhu 2008). Esse comportamento mais intuitivo de col_g é um dos motivos que fazem do Jogo de Marcação uma excelente ferramenta para mostrar limites superiores para $\chi_g(G)$.

Um grafo G é um *cactus* se quaisquer dois ciclos distintos de G compartilham no máximo 1 vértice. Sidorowicz (2007) mostrou que $\text{col}_g(G) \leq 5$ para todo cactus G . Portanto, $\chi_g(G) \leq 5$ se G é um cactus. O lema abaixo mostra que existem infinitos cacti para os quais este limite é apertado.

Lema 7.2 (Sidorowicz 2007). *Existem infinitos cacti G tais que $\chi_g(G) \geq 5$.*

Demonstração. Seja G o grafo composto de $k \geq 7$ triângulos com vértices $\{v_1^i, v_2^i, v_3^i | 1 \leq i \leq k\}$ tal que, para $1 \leq i < k$, temos $v_3^i = v_1^{i+1}$. Cada vértice v_j^i é adjacente também a 4 vértices de grau 1. O grafo G é claramente um cactus e pode ser visto na Figura 7.2.

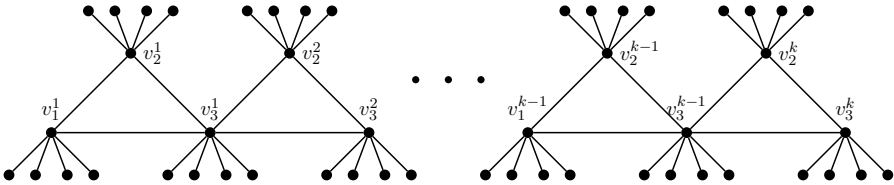


Figura 7.2: Cactus G composto por $k \geq 7$ triângulos e vértices pendentos.

Para o limite inferior de $\chi_g(G)$, mostramos uma estratégia vencedora para Bob com 4 cores a partir de configurações em que Bob consegue obter um vértice não colorível e, por fim, mostrar que Bob consegue obter uma dessas configurações no Jogo de Coloração com 4 cores no cactus G . Seja

$c_t : V \rightarrow \{0, \text{vermelho}, \text{azul}, \text{verde}, \text{amarelo}\}$ a coloração parcial de G no turno t , onde $c_t(v) = 0$ significa que v não foi colorido ainda.

A **Configuração 0** ocorre quando Bob é o próximo a jogar e existe um vértice v não colorido com 3 vizinhos x, y, z coloridos com cores distintas e um vizinho w não colorido que pode receber uma cor distinta de x, y e z . Bob pode colorir w tornando v não colorível (4 cores distintas em sua vizinhança), vencendo o jogo. As demais configurações vencedoras de Bob são vistas na Figura 7.3, com alguns vértices coloridos em destaque. Os demais vértices não estão coloridos e as folhas dos subgrafos não devem possuir nenhum vizinho colorido (Note que algumas das folhas dos subgrafos podem ser vértices da clique vizinha). O conjunto de cores pode ser alterado desde que a relação de igualdade entre as cores dos vértices permaneça.

Configuração 1 (Figura 7.3a). Suponha primeiro que Bob é o próximo a jogar em G_1 . Ele colore uma das folhas de a de verde. Se Alice não colorir a , surge a Configuração 0 em a . Se Alice colorir a (de amarelo), surge a Configuração 0 em c . Suponha agora que Alice é a próxima a jogar. Se ela colorir a ou c , deixa uma Configuração 0 para Bob e ele vence. Se ela colorir uma das folhas de a (resp. c) de vermelho, então Bob colore uma das folhas de c (resp. a) de verde. Em todo caso, Bob obtém uma Configuração 0.

Configuração 2 (Figura 7.3b). É o turno o turno de Bob. Ele colore uma das folhas de c com vermelho e obtém a Configuração 1.

Configuração 3 (Figura 7.3c). É o turno o turno de Bob. Ele colore b com azul (ou outra cor disponível) e obtém a Configuração 1.

Configuração 4 (Figura 7.3d). Se for o turno de Bob, ele está em uma Configuração 2. Se for o turno de Alice e ela não jogar em a, b ou em uma de suas folhas, ela deixa uma Configuração 2 para Bob. O mesmo acontece se ela não jogar em c, d ou em uma de suas folhas.

Configuração 5 (Figura 7.3e). Se for o turno de Bob, ele está em uma Configuração 3. Se for o turno de Alice, ela deve colorir b ou uma de suas folhas para evitar uma Configuração 3. Se ela colorir b , Bob obtém uma Configuração 2. Se ela colorir uma das folhas de b , então Bob colore b . Qualquer que seja o vértice colorido por Alice em seguida, Bob poderá obter uma Configuração 2 no turno seguinte.

Configuração 6 (Figura 7.3f). Se for o turno de Bob, ele está em uma Configuração 3 (dir) e Configuração 2 (esq). Se for o turno de Alice, ela deve colorir a para evitar as Configurações 2 e 3. Se Alice colorir a , deve ser com uma cor diferente de vermelho, gerando uma Configuração 2.

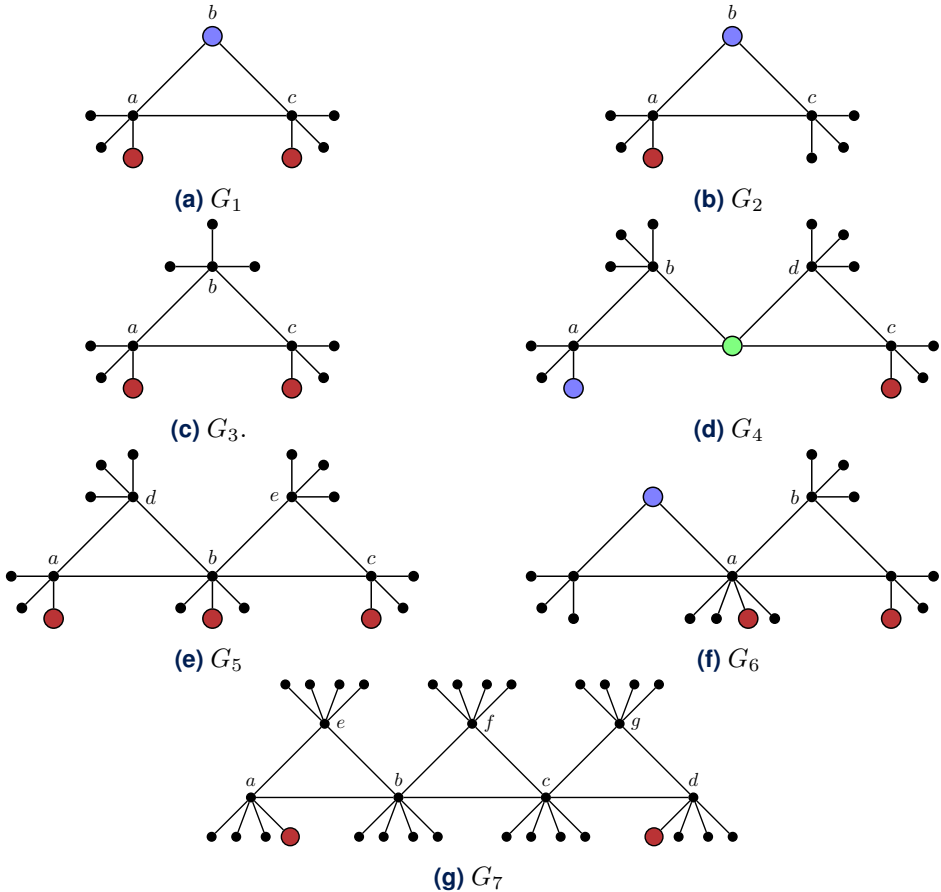


Figura 7.3: Configurações Vencedoras para Bob em G . Os Vértices coloridos estão em destaque. As folhas de cada um dos grafos apresentados não possuem nenhum vizinho colorido no grafo G .

Configuração 7 (Figura 7.3g). Suponha primeiro que Bob é o próximo a jogar. Ele colore uma das folhas de e com a cor vermelha. Independente da jogada de Alice, ele obterá uma Configuração 3 ou uma Configuração 1 em seguida. Suponha agora que Alice é a próxima a jogar. Alice não pode colorir b ou c , pois geraria uma Configuração 2 ou uma Configuração 3. Se Alice colorir e (resp. g), deve ser com a cor vermelha, senão geraria uma Configuração 2. Assim, Bob colore uma folha de c (resp. b) gerando uma Configuração 5. Se Alice colorir a (resp. d) digamos de azul, Bob

colore c (resp. b) de verde e obtém a Configuração 4. Se Alice colorir f de vermelho, ela gera uma Configuração 3. Se Alice colorir f com outra cor, Bob colore uma das folhas de c com vermelho e obtém uma Configuração 6. Por fim, se Alice colorir uma das folhas de G_7 ou um vértice de G que não pertence a G_7 , então Bob pode ser o primeiro a jogar em G_7 .

Finalmente, como $k \geq 7$, Bob sempre pode forçar a ocorrência da Configuração 7 em seu primeiro movimento, independente da primeira jogada de Alice, vencendo o jogo de coloração com 4 cores no cactus G . ■

7.3 Complexidade do Jogo de Coloração

Bodlaender (1991) indicou o problema da complexidade do Jogo de Coloração como “*um problema interessante em aberto*”, que só foi resolvido quase 30 anos depois por Costa, Pessoa et al. (2020). Uma das principais dificuldades dessa questão é definir exatamente qual é o problema de decisão. Como vimos, a Conjectura 1 de Zhu (1999) permanece em aberto: Alice vence com $k + 1$ cores se ela vence com k cores? Assim, é possível definir dois problemas de decisão: dado um grafo G e um inteiro k ,

- (Problema 1) $\chi_g(G) \leq k$?
- (Problema 2) Alice vence com k cores?

Os Problemas 1 e 2 são equivalentes se e só se a Conjectura 1 tem resposta afirmativa. Costa, Pessoa et al. (2020) provam que o seguinte Problema 3, que é mais restrito e contempla os Problemas 1 e 2, é PSPACE-completo: dado um grafo G e seu número cromático $\chi(G)$,

- (Problema 3) $\chi_g(G) = \chi(G)$?

Note que os Problemas 1 e 2 são generalizações do Problema 3, pois eles são equivalentes quando $k = \chi(G)$ já que $\chi_g(G) \leq k = \chi(G)$ se e só se $\chi_g(G) = \chi(G)$, o que é verdade se e só se Alice vence com $k = \chi(G)$ cores.

Obtém-se uma redução do jogo POSCNF onde é dado um conjunto $\{X_1, \dots, X_N\}$ de N variáveis e uma fórmula CNF (forma normal conjuntiva) com M cláusulas $C_1, \dots, C_M$, só com literais positivos. Alice e Bob se alternam valorando variáveis ainda não valoradas. Alice vence se e só se a fórmula é verdadeira. Assumimos que nenhuma cláusula tem todas as variáveis, pois seria satisfeita trivialmente. Como exemplo, Bob vence na

fórmula $(X_1 \vee X_2) \wedge (X_1 \vee X_3) \wedge (X_2 \vee X_4) \wedge (X_3 \vee X_4)$. Note que, se um jogador vence POSCNF, então também vence se seu oponente pode pular jogadas. Para isso, basta assumir que seu oponente selecionou alguma variável e continuar jogando. Se seu oponente seleciona essa variável depois no jogo, basta assumir que outra variável não selecionada foi selecionada.

Um ponto importante da redução de Costa, Pessoa et al. (2020) é o grafo F_1 da Figura 7.4, com um vértice universal s , duas cliques $K^{(1)}$ e $K^{(2)}$ com $\beta - 1$ vértices cada e dois conjuntos independentes $I^{(1)} = \{r_1, \dots, r_{2\beta}\}$ e $I^{(2)} = \{t_1, \dots, t_{2\beta}\}$ com 2β vértices cada. Cada vértice de $I^{(i)}$ é adjacente a todo vértice de $K^{(i)}$ com $i \in \{1, 2\}$.

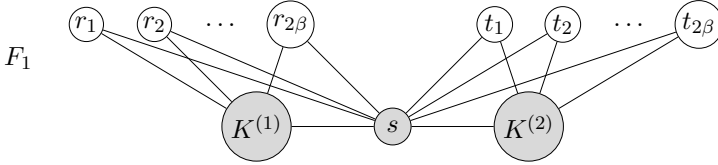


Figura 7.4: Grafo F_1 , onde $K^{(1)}$ e $K^{(2)}$ são cliques de tamanho $\beta - 1$. Os vértices $r_1, \dots, r_{2\beta}$ são adjacentes a todo vértice de $K^{(1)}$. Os vértices $t_1, \dots, t_{2\beta}$ são adjacentes a todo vértice de $K^{(2)}$. O vértice s é universal.

Lema 7.3. *Alice vence em F_1 com $2\beta - 1$ cores se e só se ela é a primeira a jogar e joga em s . Além disso, se um jogador vence em F_1 , então também vence se seu oponente pode pular jogadas.*

A prova do lema acima é deixada como Exercício 7.3. Abaixo apresentamos um esboço da prova de Costa, Pessoa et al. (2020).

Teorema 7.4 (Costa, Pessoa et al. 2020). *Dado um grafo G , decidir se $\chi_g(G) = \chi(G)$ é PSPACE-completo.*

Demonstração. Dada uma fórmula POSCNF, seja p_j para $j = 1, \dots, M$ o tamanho da cláusula C_j e $p = \max_{j=1, \dots, M} \{p_j\}$. Seja $\beta = 2N + M$. Vamos construir um grafo G tal que $\chi(G) = 2\beta - 1$, e $\chi_g(G) = 2\beta - 1$ se e só se Alice vence POSCNF.

Inicialmente, G é o grafo F_1 da Figura 7.4. Adicione a G um vértice novo y . Para cada variável X_i , adicione um vértice x_i em G . Para toda cláusula C_j , crie uma clique com vértices $\ell_{j,1}, \dots, \ell_{j,p_j}$ e adicione a aresta $\ell_{j,k}x_i$ se e só se estão relacionados a mesma variável, para $k = 1, \dots, p_j$. Também crie o vértice $\ell_{j,0}$ (não associado a variáveis) e ligue-o a y . Para

todo vértice $\ell_{j,k}$ ($j = 1, \dots, M$ e $k = 0, \dots, p_j$), substitua-o por dois vértices gêmeos (vizinhança fechada igual) $\ell'_{j,k}$ e $\ell''_{j,k}$, cuja que são vizinhos dos mesmos vizinhos de $\ell_{j,k}$. Também adicione à clique de C_j uma clique L_j com $2(\beta - p_j) - 3 \geq 2N + M$ vértices e ligue os vértices de L_j a s . Logo toda clique de cláusula tem exatamente $2\beta - 1$ vértices.

A Figura 7.5 mostra o grafo construído G para a fórmula $(X_1 \vee X_2) \wedge (X_1 \vee X_3) \wedge (X_2 \vee X_4) \wedge (X_3 \vee X_4)$. Nesse exemplo, $N = 4$ variáveis, $M = 4$ cláusulas, $p = 2$, $\beta = 2N + M = 12$ e as cliques L_1 a L_M tem $2(\beta - p) - 3 = 17$ vértices cada.

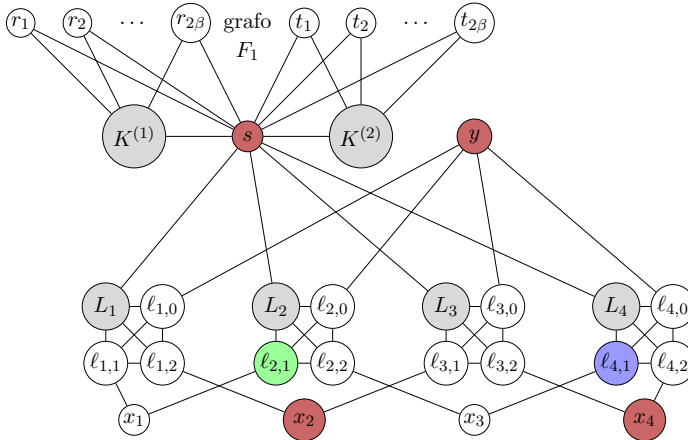


Figura 7.5: Grafo G construído da fórmula $(X_1 \vee X_2) \wedge (X_1 \vee X_3) \wedge (X_2 \vee X_4) \wedge (X_3 \vee X_4)$. Lembre que todo vértice $\ell_{j,k}$ representa dois vértices gêmeos $\ell'_{j,k}$ e $\ell''_{j,k}$; L_1, L_2, L_3, L_4 são cliques com 17 vértices. Bob vence Alice no jogo com 23 cores.

Claramente $\chi(G) = 2\beta - 1$ (Exercício 7.4). Pelo Lema 7.3, Alice deve colorir o vértice s de F_1 em sua 1ª jogada (digamos, com a cor 1), caso contrário, Bob consegue impedir a coloração total.

A ideia geral para mostrar que Alice vence com $2\beta - 1$ cores em G se e só se ela vence na fórmula de POSCNF é mostrar que o único jeito de Bob impedir que G seja colorido é colorir todo vizinho externo de uma clique de cláusula com a cor 1, começando a colorir y com a cor 1 (Figura 7.5). Alice consegue impedir este plano garantindo que toda clique de cláusula tenha pelo menos dois vizinhos externos com cores diferentes. Deixamos com o leitor a missão de completar esta prova (Exercício 7.5). ■

A Figura 7.5 mostra um exemplo do jogo. Alice deve colorir s primeiro (digamos, de vermelho) e Bob deve colorir y com a mesma cor. Quando Alice colore $\ell_{2,1}$ de verde, Bob assume que ela fez X_1 verdadeiro e, seguindo sua estratégia vencedora em POSCNF de fazer X_4 falso, Bob colore x_4 de vermelho. Quando Alice colore $\ell_{4,1}$ de azul, Bob assume que ela fez X_3 verdadeiro e, seguindo sua estratégia vencedora em POSCNF de fazer X_2 falso, Bob colore x_2 de vermelho. Com isso, todo vizinho externo da clique C_3 (que contém L_3) tem cor vermelha e portanto essa cor não pode ser usada internamente, forçando mais de $2\beta + 1$ cores. Ou seja, Bob vence.

7.4 Outras variantes do Jogo de Coloração

O Jogo de Coloração principal deste capítulo (em que Alice vence se todo vértice for colorido) foi depois investigado sob outras variantes.

Havet e Zhu (2013) propuseram o Jogo de Coloração Gulosa, semelhante ao Jogo de Coloração, mas com a diferença que o jogador não escolhe a cor do vértice selecionado, o qual é colorido com a menor cor possível em $\{1, \dots, k\}$. O *game Grundy number* $\Gamma_g(G)$ é o menor número k tal que Alice garante que todo vértice seja colorido. Eles provaram que $\Gamma_g(G) \leq 3$ em florestas e $\Gamma_g(G) \leq 7$ em árvores 2-parciais. Vários limitantes de $\chi_g(G)$ também valem para $\Gamma_g(G)$, como os seguintes: $\Gamma_g(G) \leq 3\omega(G) - 2$ em grafos de intervalo (Faigle et al. 1993), $\Gamma_g(G) \leq 2\omega(G) - 1$ em grafos de intervalo unitário (Epstein e Levy 2005), $\Gamma_g(G) \leq 3k + 2$ em árvores k -parciais for $k \geq 2$ (Zhu 2000), $\Gamma_g(G) \leq 7$ em grafos periplanares (Kierstead e Trotter 1994) e $\Gamma_g(G) \leq 17$ em grafos planares quaisquer (Zhu 2008).

Havet e Zhu (2013) também propuseram alguns problemas interessantes. O Problema 5 de (Havet e Zhu 2013) pergunta se $\chi_g(G)$ é limitado por alguma função computável de $\Gamma_g(G)$, que foi respondido negativamente por Krawczyk e Walczak (2015). O Problema 6 de (Havet e Zhu 2013), que permanece em aberto, pergunta se $\Gamma_g(G) \leq \chi_g(G)$ para todo grafo G .

Costa, Pessoa et al. (2020) provaram que tanto $\chi_g(G)$ como $\Gamma_g(G)$ são PSPACE-difíceis em grafos quaisquer. Além disso, também provaram que $\Gamma_g(G)$ é igual a $\omega(G)$ em grafos split, que será mostrado na próxima subseção, mesmo se Bob pode começar e pular jogadas.

Andres e Lock (2019) propuseram 5 variantes do Jogo de Coloração: g_B (Bob começa o jogo), $g_{A,A}$ (Alice começa e pode pular jogadas), $g_{A,B}$ (Alice começa e Bob pode pular jogadas), $g_{B,A}$ (Bob começa e Alice pode

pular jogadas) e $g_{B,B}$ (Bob começa e pode pular jogadas). Eles deixaram o problema da PSPACE-completude dessas variantes em aberto, o que foi provado por Lima et al. (2022) para as 5 variantes. Depois, Lima et al. (2023) estenderam esses jogos para variantes gulosas (em que a cor dada deve ser a menor possível) e provaram PSPACE-completude para todas as 5 variantes gulosas.

Charpentier et al. (2020) também propuseram a versão conexa do Jogo de Coloração: o subgrafo induzido pelos vértices coloridos deve sempre ser conexo. Eles provaram que Alice vence com 2 cores em grafos bipartidos e com 5 cores em grafos periplanares. Lima et al. (2022) provaram que esse Jogo de Coloração Conexa é PSPACE-completo tanto na variante em que Alice começa como quando Bob começa. Depois, Lima et al. (2023) estenderam esse jogo para variante gulosa e provaram que o Jogo de Coloração Conexa Gulosa é PSPACE-completo tanto na variante em que Alice começa como quando Bob começa.

Finalmente, Linhares Sales et al. (2026) introduziram o Jogo de Coloração Harmônica, provaram que é PSPACE-completo e obtiveram limitantes para o número de cores em caminhos, ciclos, grades e florestas de estrelas.

Jogo de Coloração Gulosa em grafos split

Dizemos que G é um *grafo split* se $V(G)$ tem uma partição (C, S) tal que C é uma clique e S é um conjunto independente. Se um vértice de S é vizinho de todo vértice de C , então é possível adicioná-lo a C e removê-lo de S , obtendo outra partição de $V(G)$. Podemos então assumir que todo vértice de S tem um não-vizinho em C . Assim, é possível colorir todo vértice de C usando as cores $\{1, \dots, |C|\}$ e colorir cada vértice $s_i \in S$ com a cor de um não-vizinho $c_i \in C$ de s_i . Ou seja, $\chi(G) = \omega(G) = |C|$.

Nessa seção, provamos que $\Gamma_g(G) = \chi(G)$ em grafos split, mostrando uma estratégia vencedora para Alice mesmo se Bob pode começar e pular qualquer jogada. Para isso, definimos um novo número jogo cromático, denotado por $\Gamma'_g(G)$, como o menor número de cores tal que Alice vence o Jogo da Coloração Gulosa mesmo se Bob pode começar e pular jogadas.

Note que $\chi(G) \leq \Gamma_g(G) \leq \Gamma'_g(G) \leq \Gamma(G) \leq \Delta(G) + 1$ para qualquer grafo G . Note também que $\Gamma'_g(G)$ pode ser muito maior que $\Gamma_g(G)$. Por exemplo, considere o grafo $K_{n,n}^{**}$ definido anteriormente (Figura 7.1), obtido de $K_{n,n}$ removendo um emparelhamento perfeito e incluindo um vértice iso-

lado. Já vimos que $\Gamma_g(K_{n,n}^{**}) = 2$ e que, se Bob joga primeiro, ele consegue forçar n cores: $\Gamma'_g(K_{n,n}^{**}) = n$.

Teorema 7.5. *Seja G um grafo split com partição (C, S) tal que C é uma clique máxima. Então Alice vence o Jogo de Coloração Gulosa com $|C|$ cores com a seguinte estratégia mesmo se Bob pode começar e pular qualquer jogada: se Bob coloriu um vértice de S na jogada anterior, Alice colore um não-vizinho desse vértice em C , se existir algum não colorido; caso contrário, ela colore qualquer vértice de G preferindo os vértices de C . Portanto, $\Gamma_g(G) = \Gamma'_g(G) = \chi(G) = |C|$ em grafos split.*

Demonstração. Note que todo vértice de S tem grau $\leq |C| - 1$ e pode ser colorido com uma cor de $\{1, \dots, |C|\}$. Seja então c_0 um vértice não colorido de C escolhido em alguma jogada. Se c_0 não tem vizinho colorido em S , então c_0 pode ser colorido com uma cor de $\{1, \dots, |C|\}$. Seja então ℓ uma cor usada em algum vizinho de c_0 em S e seja s_0 o primeiro vértice de S colorido com a cor ℓ . Então s_0 tem $\ell - 1$ vizinhos $c_1, \dots, c_{\ell-1}$ em C coloridos antes de s_0 com as cores $1, \dots, \ell - 1$, respectivamente. Se Bob coloriu s_0 , então, pela estratégia de Alice, ela colore um não-vizinho $c_\ell \in C$ de s_0 imediatamente após, se existe um não colorido, ou s_0 já tem um não-vizinho colorido $c_\ell \in C$. Se Alice coloriu s_0 , então, pela estratégia de Alice, todo vértice de C foi colorido antes de s_0 . Em todo caso, assumindo que c_ℓ é o primeiro não-vizinho colorido de s_0 em C , temos que c_ℓ foi colorido com a cor ℓ , pois c_ℓ é vizinho de $c_1, \dots, c_{\ell-1}$ e c_ℓ não tem vizinho em S com a cor ℓ (já que s_0 é o primeiro com a cor ℓ em S). Com isso, concluímos que C tem um vértice com a cor ℓ antes de colorir c_0 . Como isso vale para todo cor ℓ dos vizinhos de c_0 em S , temos que toda cor diferente aparecendo na vizinhança de c_0 também aparece em C . Portanto, c_0 pode ser colorido com uma cor de $\{1, \dots, |C|\}$. ■

7.5 Exercícios

Exercício 7.1. Prove que $\chi(G) \leq \chi_g(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Exercício 7.2. Prove que $\text{col}_g(F) \leq 4$ para toda floresta F .

Exercício 7.3. Prove o Lema 7.3.

Exercício 7.4. Prove que $\chi(G) = 2\beta - 1$ na prova do Teorema 7.4.

Exercício 7.5. Complete a prova do Teorema 7.4.

8

Jogos de Dominação em Grafos

“Our strategy is divided into eleven different phases. To keep the reader from getting lost in minute details, we give a quick overview of these and illustrate why they are necessary”

Leo Versteegen, 2024, Prova de 33 páginas da Conjectura $\frac{3}{5}$.

Dizemos que um vértice x de um grafo G *domina* um vértice y se $y = x$ ou xy é uma aresta (também dizemos que y é *dominado* por x). Um conjunto de vértices D domina um conjunto $S \subseteq V(G)$ se todo vértice de S é dominado por algum vértice de D . Um *conjunto dominante* D de G é um conjunto de vértices que domina $V(G)$. O *número de dominação* $\gamma(G)$ é o tamanho do menor conjunto dominante de G .

No *Jogo de Dominação* sobre um grafo G , Alice e Bob se alternam escolhendo em cada turno um vértice *jogável*, onde um vértice é jogável se domina pelo menos um vértice não dominado pelos vértices escolhidos anteriormente. O jogo termina quando o conjunto de vértices escolhidos é um conjunto dominante de G . O último a jogar vence a variante **normal** e perde a variante **misère**. Note que o Jogo de Dominação nessas variantes é um jogo imparcial.

Na variante de **otimização**, é dado também um inteiro positivo k na instância e Alice vence se o número total de vértices escolhidos (para o conjunto dominante final) é menor ou igual a k . Definimos o *número jogo de dominação* $\gamma_g(G)$ como o menor k tal que Alice vence a variante de otimização do Jogo de Dominação em G . Seja também $\gamma'_g(G)$ o menor k tal que Alice vence a variante alternativa de otimização do Jogo de Dominação em G em que Bob é o primeiro a jogar.

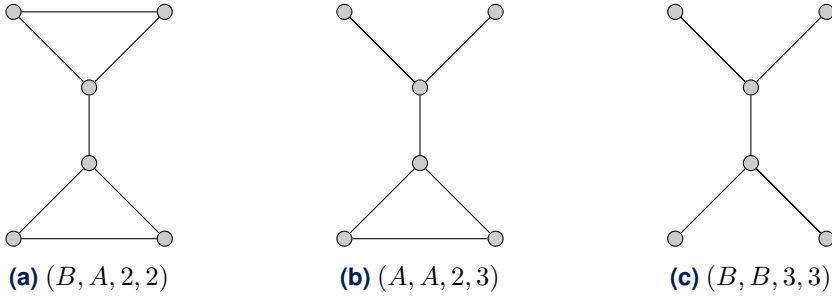


Figura 8.1: Jogo de Dominação. A notação (X, Y, p, q) significa que X vence a variante normal, Y vence a variante misère, $\gamma_g(G) = p$ e $\gamma'_g(G) = q$, onde A e B representam Alice e Bob, respectivamente.

Como exemplo, a Figura 8.1 mostra três grafos e os resultados dos jogos de dominação para cada uma das quatro variantes: normal, misère, otimização padrão e otimização alternativa (Bob começa). Ver Exercício 8.1.

A variante de otimização e os parâmetros $\gamma_g(G)$ e $\gamma'_g(G)$ foram introduzidos por Brešar, Klavžar e Rall (2010). Indicamos o livro *Domination Games Played on Graphs* de Brešar, Henning et al. (2021) como referência para a variante de otimização do jogo de dominação. As variantes normal e misère foram investigadas pela primeira vez por Brito et al. (2025).

8.1 O Número Jogo de Dominação

Com relação à complexidade computacional, Brešar, Dorbec et al. (2016) provaram o seguinte:

Teorema 8.1 (Brešar, Dorbec et al. 2016). *Os problemas de decidir se $\gamma_g(G)$ e $\gamma'_g(G)$ são menores que um dado inteiro são PSPACE-completos.*

O teorema abaixo mostra limitantes para os parâmetros $\gamma_g(G)$ e $\gamma'_g(G)$.

Teorema 8.2 (Brešar, Klavžar e Rall 2010).

$$\gamma(G) \leq \gamma_g(G) \leq 2\gamma(G) - 1$$

$$\gamma(G) \leq \gamma'_g(G) \leq 2\gamma(G)$$

Demonstração. Como os vértices escolhidos nos jogos formam um conjunto dominante, então $\gamma(G) \leq \gamma_g(G)$ e $\gamma(G) \leq \gamma'_g(G)$. Para provar que

$\gamma_g(G) \leq 2\gamma(G) - 1$, a estratégia de Alice é escolher um conjunto dominante mínimo qualquer D , ordená-los e, em cada jogada, selecionar o próximo vértice nessa ordem que seja jogável. Note que, quando Alice terminar esse processo, o conjunto de vértices selecionados por Alice e Bob será um conjunto dominante. Com isso, Alice faz no máximo $|D| = \gamma(G)$ movimentos e Bob no máximo $|D| - 1 = \gamma(G) - 1$ movimentos, totalizando $2\gamma(G) - 1$ movimentos no máximo. Se Bob começa e Alice seguir esta mesma estratégia, teremos $\gamma'_g(G) \leq 2\gamma(G)$. ■

O lema abaixo mostra que esses limitantes são apertados, para $r = k$.

Lema 8.3. *Dado $k \geq 1$ e $1 \leq r \leq k$, seja $G_{k,r}$ o grafo obtido de r cópias da estrela $K_{1,k}$ e de $k-r$ cópias de K_2 . Então, $\gamma(G_{k,r}) = k$, $\gamma_g(G_{k,r}) = k+r-1$ e $\gamma'_g(G_{k,r}) = k+r$.*

Demonstração. Exercício 8.2. ■

Uma propriedade importante nesse jogo é o *Princípio da Continuação*, mostrado a seguir. Para isso, seja $G|X$ a instância do Jogo de Dominação sobre G considerando que os vértices de $X \subseteq V(G)$ já foram selecionados. Sejam $\gamma_g(G|X)$ e $\gamma'_g(G|X)$ definidos analogamente. Note primeiramente que vale o seguinte lema.

Lema 8.4. *Dado um grafo G e $X \subseteq V(G)$:*

$$\gamma_g(G|X) = 1 + \min\{\gamma'_g(G|X \cup \{v\}) : v \text{ é jogável em } G|X\}$$

$$\gamma'_g(G|X) = 1 + \max\{\gamma_g(G|X \cup \{v\}) : v \text{ é jogável em } G|X\}$$

Demonstração. Exercício 8.3. ■

Lema 8.5 (Princípio da Continuação (Kinnersley, West e Zamani 2013)). *Seja G um grafo e $X \subseteq Y \subseteq V(G)$. Então*

$$\gamma_g(G|X) \geq \gamma_g(G|Y)$$

$$\gamma'_g(G|X) \geq \gamma'_g(G|Y)$$

Demonstração. Seja $\mathcal{S}_X$ uma estratégia vencedora do Jogo de Dominação sobre $G|X$ (começando com os vértices de X já selecionados) com o número mínimo $\gamma_g(G|X)$ de vértices. Vamos obter uma estratégia $\mathcal{S}_Y$ de Alice no

jogo sobre $G|Y$ selecionando um total de $\gamma_g(G|X)$ vértices, simulando as jogadas no jogo em $G|X$ e usando a estratégia $\mathcal{S}_X$.

Como $X \subseteq Y$, toda jogada de Bob no jogo em $G|Y$ é válida no jogo em $G|X$. Seja $v \notin X$ o vértice determinado por $\mathcal{S}_X$ em alguma jogada de Alice no jogo em $G|Y$. Seja v' o vértice jogado por Alice na estratégia $\mathcal{S}_Y$, determinado a seguir: se $v \notin Y$ e v não foi selecionado ainda, então $v' = v$; se $v \in Y - X$ ou v já foi selecionado, então v' é qualquer vértice jogável ainda não selecionado, caso exista; se não há vértices jogáveis, o jogo terminou.

Resumindo, o vértice v é o considerado para a estratégia $\mathcal{S}_X$ no jogo sobre $G|X$, enquanto v' é o considerado para a estratégia $\mathcal{S}_Y$ no jogo sobre $G|Y$. Segue que, em cada turno, o conjunto dos vértices dominados no jogo sobre $G|Y$ é sempre maior ou igual aos dominados no jogo sobre $G|X$. Portanto, $\gamma_g(G|Y) \leq \gamma_g(G|X)$ e $\gamma'_g(G|Y) \leq \gamma'_g(G|X)$. ■

Pelo Princípio da Continuação, podemos sempre assumir que, entre dois vértices jogáveis x e y tais que $N[x] \subseteq N[y]$, Alice nunca seleciona x (preferindo y), enquanto Bob nunca seleciona y (preferindo x). Na verdade, essa propriedade pode ser reforçada para o seguinte, onde J é o conjunto de vértices jogáveis em algum momento do jogo: se $N[x] \cap J \subseteq N[y] \cap J$, Alice nunca seleciona x (preferindo y), enquanto Bob nunca seleciona y (preferindo x).

Teorema 8.6 (Brešar, Klavžar e Rall 2010).

Para todo grafo G e $X \subseteq V(G)$: $|\gamma_g(G|X) - \gamma'_g(G|X)| \leq 1$

Demonstração. Considere o jogo sobre $G|X$. Na variante em que Alice é a primeira a jogar, seja x o primeiro vértice jogado por ela em uma estratégia ótima. Logo, pelos Lemas 8.4 e 8.5,

$$\gamma_g(G|X) = 1 + \gamma'_g(G|X \cup \{x\}) \leq 1 + \gamma'_g(G|X).$$

Considerando agora a variante em que Bob é o primeiro a jogar, seja x o primeiro vértice jogado por ele em uma estratégia ótima. Logo, novamente pelos Lemas 8.4 e 8.5,

$$\gamma'_g(G|X) = 1 + \gamma_g(G|X \cup \{x\}) \leq 1 + \gamma_g(G|X). \quad \blacksquare$$

Usando tais resultados, é possível provar os seguintes resultados para caminhos e ciclos.

Teorema 8.7 (Kořmrlj 2017). *Seja $n \geq 3$. Portanto,*

$$\gamma_g(P_n) = \gamma_g(C_n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1, & \text{se } n \equiv 3 \pmod{4}, \\ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\gamma'_g(P_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \quad e \quad \gamma'_g(C_n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil - 1, & \text{se } n \equiv 2 \pmod{4}, \\ \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

8.2 O Teorema $\frac{2}{3}$ e a Conjectura $\frac{3}{5}$

Kinnersley, West e Zamani (2013) provaram o teorema abaixo, conhecido como Teorema $\frac{2}{3}$, e propuseram a Conjectura $\frac{3}{5}$. Dois anos depois, Bujtás (2015) deu uma prova alternativa do Teorema $\frac{2}{3}$, com uma pequena melhoria, usando a *Técnica do Potencial* vista nas Seções 3.1 e 3.2 (Soldados de Conway e Teorema de Erdős-Selfridge), que é chamada de *Bujtás Discharging Method* por Brešar, Henning et al. (2021). Essa técnica do potencial de Bujtás (2015) foi aplicada recentemente por Versteegen (2024) de modo mais refinado para finalmente provar em mais de 30 páginas e após 11 anos a Conjectura $\frac{3}{5}$ (que agora é chamada de Teorema $\frac{3}{5}$).

Teorema 8.8 (Bujtás 2015). *Se G é um grafo sem vértices isolados, então*

$$\gamma_g(G) \leq \left(\frac{2}{3}\right) \cdot n \quad e \quad \gamma'_g(G) \leq \left(\frac{2}{3}\right) \cdot n,$$

onde n é o número de vértices de G .

Demonstração. Durante o jogo de dominação, um vértice é P2 (potencial 2) se não é dominado, P1 (potencial 1) se é dominado mas tem um vizinho não dominado, e P0 (potencial 0) se é dominado e todos os seus vizinhos estão dominados. O potencial do grafo G é a soma dos potenciais de seus vértices, que inicia com valor $2n$ (todos P2) e termina com valor 0 (todos P0). Como o grafo não tem vértices isolados, nunca haverá um vértice P2 isolado, pois seus vizinhos sempre serão P1 ou P2.

Note que vértices P0 não são jogáveis e arestas entre vértices P1 são irrelevantes (pois já estão dominados). Logo, após cada jogada, podemos remover vértices P0 e arestas entre vértices P1. Ou seja, existem apenas vértices P1 ou P2 e só arestas entre vértices P1 e P2 ou entre vértices P2.

Note que qualquer jogada reduz o potencial em pelo menos 2, pois a seleção de um vértice P2 o torna P0 e a seleção de um vértice P1 o torna P0 bem como seu vizinho P2 se torna P0 ou P1.

Vamos considerar então duas fases durante o jogo. Na Fase 1, existe uma jogada que reduz o potencial total em pelo menos 4. Caso contrário, estamos na Fase 2. Assuma inicialmente que estamos na Fase 2.

Se um vértice P2 v tem dois vizinhos P2 v_1 e v_2 , a seleção de v diminui o potencial total em pelo menos 4, pois v se torna P0 e v_1 e v_2 se tornam P0 ou P1. Logo não existe um vértice P2 com dois vizinhos P2.

Se existem dois vértices P2 adjacentes v_1 e v_2 , então todos os outros vizinhos de v_1 e v_2 são P1 e portanto v_1 e v_2 se tornam P0 com a seleção de v_1 ou v_2 , diminuindo o potencial total em pelo menos 4. Logo não há dois vértices P2 adjacentes e só há arestas entre vértices P1 e P2.

Além disso, se existe um vértice P1 v adjacente a dois vértices P2 v_1 e v_2 , então a seleção de v torna v , v_1 e v_2 P0, diminuindo o potencial em pelo menos 5. Logo todo vértice P1 é vizinho de exatamente um vértice P2. Finalmente, se um vértice P2 v tem dois vizinhos P1 v_1 e v_2 , a seleção de v o torna P0, bem como v_1 e v_2 se tornam P0 (pois v é o único vizinho P2 deles), diminuindo o potencial em pelo menos 4.

Com isso, concluímos que na Fase 2 toda componente conexa do grafo é uma aresta entre um vértice P1 e um vértice P2 e portanto qualquer jogada na Fase 2 diminui o potencial total em exatamente 3 pois ambos os vértices P1 e P2 se tornam P0. Além disso, na Fase 1, Alice joga diminuindo o potencial em pelo menos 4, enquanto Bob tenta reduzir o potencial em pelo menos 2, resultando em uma diminuição média de pelo menos 3 no potencial total a cada duas jogadas. Logo, como o potencial final será zero e o potencial inicial é $2n$ e diminui pelo menos 3 na média a cada jogada, então o número de jogadas é no máximo $2n/3$. ■

O teorema abaixo prova a Conjectura $\frac{3}{5}$ de Kinnersley, West e Zamani (2013) (que agora é chamada de Teorema $\frac{3}{5}$), que permaneceu em aberto por mais de uma década. A demonstração (de 33 páginas) também aplica a técnica do potencial de Bujtás, porém usando 11 estados, ao invés de apenas 3 estados P0, P1 e P2.

Teorema 8.9 (Versteegen 2024). *Se G é um grafo sem vértices isolados,*

$$\gamma_g(G) \leq \left(\frac{3}{5}\right) \cdot n \quad e \quad \gamma'_g(G) \leq \left(\frac{3}{5}\right) \cdot n + \frac{2}{5},$$

onde n é o número de vértices de G .

8.3 Nimbers do Jogo Normal de Dominação

Na literatura sobre o Jogo de Dominação, há muitos artigos sobre sua variante de otimização e o número jogo de dominação $\gamma_g(G)$. No entanto, só recentemente a variante normal desse jogo foi investigada. Brito et al. (2025) provaram a complexidade do jogo normal.

Teorema 8.10 (Brito et al. 2025). *O Jogo Normal de Dominação é PSPACE-completo mesmo em grafos com diâmetro dois.*

Lembre que, na variante normal, o último a jogar vence. Como exemplo, note que, nos caminhos P_1 e P_2 com 1 e 2 vértices, o primeiro jogador vence em seu primeiro movimento, independentemente de sua jogada, indicando que o nimber desses grafos é 1, de acordo com a Teoria de Sprague-Grundy vista no Capítulo 2. No caso do caminho P_3 , o primeiro jogador pode vencer imediatamente jogando no vértice central (retornando uma posição com nimber 0), ou pode jogar numa extremidade retornando uma posição com nimber 1, indicando que seu nimber é $\text{mex}\{0, 1\} = 2$, onde lembramos que mex é o mínimo excludente. No caminho P_4 , o primeiro a jogar sempre perde, indicando que seu nimber é igual a 0.

Nesta seção, determinamos os nimbers de caminhos P_n e ciclos C_n no Jogo de Dominação e, assim, qual jogador possui estratégia vencedora.

Teorema 8.11 (Brito et al. 2025). *Considere o Jogo Normal de Dominação sobre o caminho P_n para $n \geq 1$. Os nimbers de P_1 , P_2 e P_3 são 1, 1 e 2, respectivamente. Para $n \geq 4$, o nimber de P_n é 0, 1, 1 ou 3 dependendo se $n\%4$ é 0, 1, 2 ou 3, respectivamente, onde $n\%4$ é o resto da divisão de n por 4. Logo, Alice vence em P_n se e só se n não é múltiplo de 4.*

Como exemplo, conclui-se pela Teoria de Sprague-Grundy que Bob vence o jogo normal de dominação sobre a união disjunta de P_3 , P_6 e P_7 , pois o nimber total é a operação xor bit-a-bit dos nimbers desses grafos, que é $2 \oplus 1 \oplus 3 = 0$.

Para provar esse teorema, definimos P'_n no jogo de dominação como um caminho P_{n+2} em que o primeiro vértice é o único já selecionado no jogo (pertencendo ao conjunto dominante final). Analogamente, definimos P''_n como um caminho P_{n+4} em que o primeiro e o último vértice são os únicos já selecionados no jogo. Note que P_n , P'_n e P''_n tem exatamente n vértices que precisam ser dominados.

Vamos provar inicialmente o seguinte sobre os nimbers de P'_n e P''_n .

Lema 8.12. *O nimber de P'_n e P''_n é igual a $n\%4$.*

Demonstração. A prova será por indução. Não é difícil provar que vale para P'_n e P''_n para $n \leq 4$ (Exercício 8.4). Seja $n \geq 5$ e suponha por indução que o lema vale para qualquer valor menor que n . Vamos provar as seguintes recorrências para os nimbers de P'_n e P''_n .

$$\text{nim}(P'_n) = \text{mex} \left\{ \text{nim}(P'_{n-1}), \text{nim}(P'_{n-2}), \text{nim}(P'_{n-3}), \text{nim}(P''_{n-2}), \text{nim}(P''_{n-3}), \right. \\ \left. \text{nim}(P''_{k-3}) \oplus \text{nim}(P'_{n-k}) : k = 4, \dots, n-1 \right\}$$

$$\text{nim}(P''_n) = \text{mex} \left\{ \text{nim}(P''_{n-1}), \text{nim}(P''_{n-2}), \text{nim}(P''_{n-3}), \right. \\ \left. \text{nim}(P''_{k-3}) \oplus \text{nim}(P''_{n-k}) : k = 4, \dots, n-1 \right\}$$

Considere inicialmente o jogo sobre P'_n com vértices $v_0, v_1, \dots, v_{n+1}$ e vamos listar os possíveis movimentos do primeiro jogador. Se for em v_1, v_2 ou v_3 , obtemos respectivamente P'_{n-1}, P'_{n-2} e P'_{n-3} (com nimbers $(n-1)\%4, (n-2)\%4$ e $(n-3)\%4$). Se for em v_{n+1} ou v_n , obtemos respectivamente P''_{n-2} e P''_{n-3} (com nimbers $(n-2)\%4$ e $(n-3)\%4$). Suponha então o primeiro movimento em v_k para $k = 4, \dots, n-1$. Essa jogada obtém dois grafos P''_{k-3} e P'_{n-k} , com nimber total é $r(n, k) = (k-3)\%4 \oplus (n-k)\%4$. Não é difícil provar com uma análise de casos, observando as possibilidades de resto de n e k módulo 4 que $r(n, k)$ é sempre diferente de $n\%4$ (Exercício 8.5(a)). Desse modo, aplicando o mínimo excludente sobre todos os valores possíveis, obtemos nimber $\text{mex}\{(n-1)\%4, (n-2)\%4, (n-3)\%4\} = n\%4$.

Considere agora o jogo sobre P''_n com vértices $v_0, v_1, \dots, v_{n+3}$ e vamos listar os possíveis movimentos do primeiro jogador. Se for em v_1, v_2 ou v_3 , obtemos respectivamente P''_{n-1}, P''_{n-2} e P''_{n-3} (com nimbers $(n-1)\%4, (n-2)\%4$ e $(n-3)\%4$). Analogamente, se for em v_{n+2}, v_{n+1} ou v_n , obtemos respectivamente P''_{n-1}, P''_{n-2} e P''_{n-3} (com nimbers $(n-1)\%4, (n-2)\%4$ e $(n-3)\%4$). Suponha então o primeiro movimento em v_k para $k = 4, \dots, n-1$. Essa jogada obtém dois grafos P''_{k-3} e P''_{n-k} , com nimber total é $r(n, k) = (k-3)\%4 \oplus (n-k)\%4$, definido no parágrafo anterior. Como $r(n, k)$ é sempre diferente de $n\%4$ (Exercício 8.5(a)), aplicando o mínimo excludente sobre todos os valores possíveis, obtemos nimber $\text{mex}\{(n-1)\%4, (n-2)\%4, (n-3)\%4\} = n\%4$. ■

Agora conseguimos determinar os nimbers de caminhos.

Prova do Teorema 8.11. Considere o jogo sobre P_n com vértices $v_1, v_2, \dots, v_n$. Vamos provar a seguinte recorrência listando os possíveis movimentos do primeiro jogador.

$$\text{nim}(P_n) = \text{mex} \left\{ \text{nim}(P'_{n-2}), \text{nim}(P'_{n-3}), \right. \\ \left. \text{nim}(P'_{k-3}) \oplus \text{nim}(P'_{n-k}) : k = 4, \dots, n-1 \right\}$$

Se for em v_1 ou v_2 , obtemos respectivamente P'_{n-2} e P'_{n-3} , com nimbers iguais a $(n-2)\%4$ e $(n-3)\%4$ pelo Lema 8.12. Analogamente, se for em v_n ou v_{n-1} . Suponha então o primeiro movimento em v_{k-1} para $k = 4, \dots, n-1$. Essa jogada obtém dois grafos P'_{k-3} e P'_{n-k} , com nimber total igual a $r(n, k) = (k-3)\%4 \oplus (n-k)\%4$ pelo Lema 8.12. Como visto antes na prova do Lema 8.12, $r(n, k)$ é sempre diferente de $n\%4$ (Exercício 8.5(a)). Além disso, $r(n, k)$ é igual a $(n-1)\%4$ se e só se $n\%4 \in \{1, 3\}$ e $k\%4 \in \{0, 2\}$ (Exercício 8.5(b)).

Portanto, aplicando o mínimo excludente mex, temos o seguinte. Se $n\%4 \in \{0, 2\}$, o nimber é $\min\{n\%4, (n-1)\%4\}$. Se $n\%4 \in \{1, 3\}$, o nimber é $n\%4$. Logo o nimber de P_n é igual a 0, 1, 1 ou 3 dependendo se $n\%4$ é 0, 1, 2 ou 3. ■

O teorema abaixo resolve o jogo para qualquer ciclo C_n .

Teorema 8.13 (Brito et al. 2025). *Considere o Jogo Normal de Dominação e seja $n \geq 3$. O nimber de C_n é igual a 1 se $n\%4 = 3$, e é igual a 0, caso contrário. Consequentemente, Alice vence em C_n se e só se $n\%4 = 3$.*

Demonstração. Exercício 8.6 (Dica: use o Lema 8.12). ■

Como exemplo, podemos concluir pela Teoria de Sprague-Grundy que Alice perde a variante normal do Jogo de Dominação sobre a união disjunta de C_3, C_4, C_5, C_6 e C_7 , visto que o nimber total é a operação xor bit-a-bit dos nimbers desses grafos, que é $1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0$.

Outro exemplo pode ser visto no grafo da Figura 8.2, onde Alice vence selecionando o vértice cinza em sua primeira jogada, visto que retorna uma posição equivalente a união disjunta de P'_1, P'_2, P'_3, P'_3 e P''_7 , com nimber igual $1 \oplus 2 \oplus 3 \oplus 3 \oplus 3 = 0$.

Resultados similares também foram obtidos para a variante partizan do Jogo Normal de Dominação, onde cada vértice é rotulado com A ou B

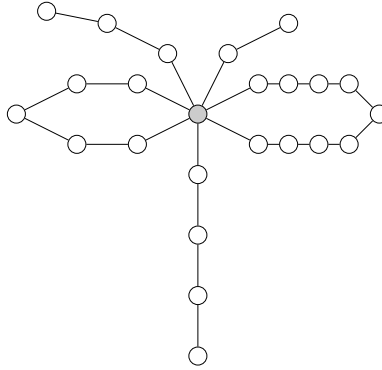


Figura 8.2: Variante normal do Jogo de Dominação.

na instância (antes do início do jogo) e Alice (resp. Bob) só pode selecionar vértices rotulados com A (resp. B). Brito et al. (2025) provaram que essa variante partizan é PSPACE-completa e, usando a Teoria Combinatória dos Jogos vista no Capítulo 10, obtiveram um algoritmo polinomial de programação dinâmica para decidir o vencedor desta variante partizan em caminhos e ciclos para qualquer coloração inicial dos vértices.

8.4 Jogo Misère de Dominação

Além da variante normal, Brito et al. (2025) também provaram que o Jogo Misère de Dominação é PSPACE-completo. Curiosamente, a redução é muito simples e a partir da variante normal.

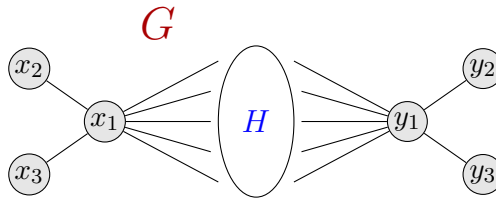


Figura 8.3: Prova da PSPACE-completude do Jogo Misère de Dominação. Redução da variante normal para a variante misère.

Teorema 8.14 (Brito et al. 2025). *O Jogo Misère de Dominação é PSPACE-completo mesmo em grafos com diâmetro quatro.*

Demonstração. Exercício 8.7. A redução é simples e usa a construção do grafo G da Figura 8.3, a partir da variante normal sobre o grafo H . ■

8.5 Exercícios

Exercício 8.1. Prove que os resultados dos 12 jogos da Figura 8.1 estão corretos.

Exercício 8.2. Prove o Lema 8.3.

Exercício 8.3. Prove o Lema 8.4.

Exercício 8.4. Prove que o Lema 8.12 vale para $n \leq 4$: o número de P'_n e P''_n é $n \% 4$ para $n = 1, 2, 3, 4$.

Exercício 8.5. Considere a função $r(n, k) = (k - 3) \% 4 \oplus (n - k) \% 4$ usada na prova do Lema 8.12 e do Teorema 8.11. Prove os seguintes itens (Dica: analise as 16 possibilidades de restos de n e k módulo 4).

- (a) Prove que $r(n, k)$ é diferente de $n \% 4$.
- (b) Prove que $r(n, k)$ é igual a $(n - 1) \% 4$ se e só se $n \% 4 \in \{1, 3\}$ e $k \% 4 \in \{0, 2\}$.

Exercício 8.6. Prove o Teorema 8.13 (Dica: use o Lema 8.12).

Exercício 8.7. Use a redução da Figura 8.3 para provar que o Jogo Misère de Dominação é PSPACE-completo.

9

Jogos de Polícia e Ladrão em Grafos

*“Here we envision a chase from intersection to intersection in a city.
A knowledge of which graphs are cop-win might in theory help
law-enforcement officers to decide where to put up roadblocks”*

Richard Nowakowski e Peter Winkler, 1983

O jogo de Polícia e Ladrão ($\mathcal{C}\&\mathcal{R}$ - *Cops and Robber*) apresentado neste capítulo difere da maioria dos outros jogos estudados neste livro (exceto o jogo Soldados de Conway da Seção 4.1) no fato de ambos os jogadores não selecionarem (ou colorirem) elementos (e.g., vértices ou arestas de um grafo) mas terem um conjunto de elementos (fichas ou *tokens*) que podem mover em cada passo. Exceto por isso, este é um jogo partizan de 2 jogadores (ambos os jogadores têm conjuntos distintos de fichas) com informação completa e sem aleatoriedade em que ambos os jogadores têm objetivos distintos.

O jogo $\mathcal{C}\&\mathcal{R}$ (Polícia e Ladrão) foi introduzido por Nowakowski e Winkler (1983) e independentemente por Quilliot (1983). Tentamos dar aqui uma visão geral não exaustiva dos resultados obtidos ao longo de 40 anos deste tema. Para maiores detalhes, ver (Alspach 2004; Hahn 2007; Baird e Bonato 2012; Bonato e Nowakowski 2011).

$\mathcal{C}\&\mathcal{R}$ é jogado sobre um grafo $G = (V, E)$ com n vértices e m arestas. Um jogador $\mathcal{C}$ (*cops*) controla uma equipe de $k \geq 1$ *policiais*, enquanto o segundo jogador $\mathcal{R}$ (*robber*) controla um *ladrão* que deseja evitar ser apanhado pelos policiais. Inicialmente, $\mathcal{C}$ coloca os seus policiais nos vértices de G . Vários policiais podem ocupar o mesmo vértice. Em seguida, $\mathcal{R}$ escolhe um vértice e põe seu ladrão lá. A cada turno, $\mathcal{C}$ pode mover cada um dos seus policiais ao longo de uma aresta, e depois $\mathcal{R}$ pode mover o ladrão ao longo de uma aresta. Nem os policiais nem o ladrão são obri-

gados a se mover. Este é um jogo de informação completa: o ladrão sabe onde estão os policiais e vice-versa. Os policiais vencem se um deles ocupar o mesmo vértice do ladrão. Se o ladrão conseguir fugir sempre, então ele vence (como o grafo é finito e o jogo é determinístico, podemos assumir que o ladrão vence se uma mesma configuração for obtida duas vezes).

Estratégias: Do ponto de vista algorítmico, o objetivo é conceber estratégias que permitam a um dos jogadores vencer. Uma estratégia para um jogador define como este deve se comportar em cada passo. Como este é um jogo de informação completa, as estratégias determinísticas não dependem do passado. Assim, a forma como ambos os jogadores decidem a sua próxima jogada depende apenas da configuração atual, ou seja, do conjunto de vértices ocupados pelos policiais e da posição do ladrão.

Mais formalmente, uma estratégia (posicional) para o Jogador $\mathcal{C}$ usando $k \geq 1$ policiais é definida da seguinte forma. Uma k -estratégia para $\mathcal{C}$ é definida por um par $(I, \sigma_{\mathcal{C}})$ onde $I \subseteq V$ é o multiconjunto¹ dos vértices iniciais dos k policiais ($|I| = k$) e $\sigma_{\mathcal{C}} : V^{k+1} \rightarrow V^k$ é uma função que associa $\sigma_{\mathcal{C}}(S) = (c'_1, \dots, c'_k)$ a qualquer configuração $S = (c_1, \dots, c_k, r) \in V^{k+1}$, onde c_i e $c'_i \in N[c_i]$ representam os vértices antigo e novo do i -ésimo policial, e r é o vértice do ladrão. Da mesma forma, uma estratégia para o ladrão $\mathcal{R}$ contra k policiais é definida como um par $(r_0, \sigma_{\mathcal{R}} : V^{k+1} \rightarrow V)$. Uma estratégia σ é *vencedora* para um jogador se este jogador seguindo σ vencer qualquer que seja a estratégia seguida pelo outro jogador.

Exemplos: árvore, ciclo e grade. Em uma árvore, é fácil ver que apenas 1 policial ($k = 1$) vence. De fato, uma estratégia vencedora para o policial é começar em qualquer vértice de T e, em cada passo, mover-se ao longo do caminho (único) entre seu vértice e o do ladrão. É evidente que, após um número finito de passos, o ladrão acaba sendo preso. Em um ciclo de tamanho pelo menos 4, o ladrão pode vencer contra 1 policial, atingindo em cada passo um vértice a uma distância pelo menos 2 dele. Em uma grade $n \times m$, não é difícil ver que 2 policiais conseguem prender o ladrão (Exercício 9.1).

¹ Multiconjunto (ou *multiset*) é uma extensão do conceito de conjunto permitindo elementos repetidos, em que a *multiplicidade* de um elemento é o número de ocorrências dele no multiconjunto.

9.1 Grafos cop-win

Os trabalhos seminais de Nowakowski e Winkler (1983) e Quilliot (1983) sobre o jogo $\mathcal{C}\&\mathcal{R}$ se concentraram em caraterizar os grafos *cop-win*, que são os grafos em que um único policial consegue vencer, como as árvores. Eles forneceram uma boa caraterização combinatória dos grafos cop-win, que apresentamos brevemente abaixo, visto que é muito instrutiva para o estudo do jogo $\mathcal{C}\&\mathcal{R}$ e suas variantes e que muitos resultados se aproveitam de técnicas semelhantes.

Considere o último passo de um jogo com um único policial, logo antes da captura do ladrão. Neste passo, o policial se move para um vértice $y \in V$ e então o ladrão em $x \in V$ não tem forma de escapar (caso contrário, ele fugiria e o jogo continuaria). Logo, $N[x] \subseteq N[y]$, ou seja, o vértice y domina x e sua vizinhança. Analisando agora o penúltimo passo, o policial vai para um vértice z quando o ladrão está num vértice w de tal forma que, para todo $x \in N[w]$, a vizinhança de x é dominada por algum $y_x \in N[z]$. Então, qualquer que seja o próximo movimento do ladrão em direção a um vértice $x \in N[w]$, o policial irá para y_x e depois capturar o ladrão no passo seguinte. Isto leva naturalmente à seguinte definição.

Seguindo essa ideia, dizemos que uma sequência $(v_1, \dots, v_n)$ dos vértices de um grafo G é uma *ordem de desmonte* se $N[v_i] - \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ está contido em algum $N[v_j]$ com $j > i$ para todo $1 \leq i < n$. Dizemos então que um grafo é *desmontável* (*dismantable*) se possui uma ordem de desmonte. Em outras palavras, se os vértices forem removidos nessa ordem, então, no momento da remoção de um vértice, com exceção do último, ele é dominado pelo elemento seguinte da ordem.

Teorema 9.1 (Nowakowski e Winkler 1983; Quilliot 1983). *Um grafo é cop-win se e só se é desmontável.*

Esboço da Demonstração. Por indução no número n de vértices. Seja G um grafo cop-win. Seja v um vértice tal que $N[v]$ é dominado por algum vértice w (vimos que tal vértice existe em grafos cop-win, sendo um candidato a último vértice do ladrão). Note que $G' = G[V \setminus \{v\}]$ é cop-win, pois o policial pode simular sua estratégia vencedora de G em G' , simplesmente indo para w no jogo em G' sempre que a estratégia vencedora em G indica a ida para v . Deixamos ao leitor explicar melhor essa estratégia em G' e porque é vencedora (Exercício 9.2). Logo, como G' é cop-win, então G' é desmontável por indução. Acrescentando v como primeiro vértice na ordem

de desmonte de G' , obtém-se uma ordem de desmonte de G , mostrando que G é desmontável.

Suponha agora que G é desmontável e seja $(v_1, \dots, v_n)$ uma ordem de desmonte de G . Vamos mostrar que essa ordem indica uma estratégia vencedora do policial (ver, por exemplo, Isler, Kannan e Khanna (2006)). Seja T a árvore de G com raiz em v_n tal que, para qualquer $i < n$, o pai de v_i na árvore é o vértice v_j , com maior índice $j > i$, tal que $N[v_i] - \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ está contido em $N[v_j]$. O policial começa então o jogo em v_n . Sua estratégia consiste em ir para o vizinho que é um antepassado do vértice atual do ladrão em T , e que está mais próximo do ladrão. Para provar que esta estratégia é vencedora, temos de provar que (1) existe sempre um vértice desse tipo na vizinhança do policial, de modo que este ocupa sempre um antepassado da posição do ladrão, e (2) a distância entre o policial e v_n nunca diminui e aumenta estritamente após um número finito de passos, de modo que a estratégia termina (Exercício 9.2). ■

É possível decidir em tempo polinomial $O(n \cdot m)$ se um grafo é desmontável e, consequentemente, se é cop-win. Como exemplo de grafo desmontável, temos os grafos *cordais* (ou triangulados, grafos sem ciclos induzidos de tamanho 4 ou mais) e os grafos *ponteados* (ou grafos *bridged*, grafos sem ciclos *isométricos* de tamanho 4 ou mais) (Farber 1987; Anstee e Farber 1988; Chepoi 1997; Le e Spinrad 2004).

9.2 Cop-number e a Conjectura de Meyniel

Nesta seção, apresentamos os principais aspectos algorítmicos e de complexidade computacional dos jogos de $\mathcal{C}\&\mathcal{R}$.

Cop Number

Após a caracterização dos grafos cop-win, Aigner e Fromme (1984) autorizaram o uso de mais policiais. Claramente, n policiais sempre vencem (ficando um em cada vértice). Define-se o *cop-number* $\text{cn}(G)$ de um grafo G como o número mínimo de policiais necessários para capturar um ladrão em G . Claramente, um grafo G é cop-win se e só se $\text{cn}(G) = 1$.

Com essa definição, surge naturalmente a questão da complexidade computacional de determinar o cop-number $\text{cn}(G)$. Como visto na seção anterior, decidir se $\text{cn}(G) = 1$ pode ser feito em tempo quadrático.

No início dos anos 1980, a complexidade de outras variantes de problemas de perseguição em grafos direcionados foi investigada por Chandra e Stockmeyer (1976), Adachi, Iwata e Kasai (1979), Reif (1979), Chandra, Kozen e Stockmeyer (1981), Johnson (1983), Adachi, Iwata e Kasai (1984), Reif (1984) e Fraenkel e Goldschmidt (1987). Por exemplo, em algumas variantes, o ladrão não precisa de ser apanhado, mas deve ser impedido de chegar a um determinado vértice. Na sequência deste trabalho, Goldstein e Reingold (1995) provou que decidir se $\text{cn}(G) \leq k$ (k parte da entrada) é EXPTIME-completo quando são dadas posições iniciais. A sua redução usa a Fórmula Booleana Alternada, onde dois jogadores modificam alternativamente as variáveis de uma fórmula booleana normal conjuntiva e o objetivo do primeiro jogador é que a fórmula se torne verdadeira. Usando um argumento semelhante, provaram que decidir se $\text{cn}(G) \leq k$ é EXPTIME-completo em digrafos fortemente conexos.

Por outro lado, sendo k fixo, decidir se o *cop number* de um grafo com n vértices é no máximo k pode ser decidido em tempo polinomial $n^{O(k)}$ (Berarducci e Intrigila 1993; Hahn e MacGillivray 2006). Um ingrediente importante para este resultado é a noção de grafo de configurações (ver seção 1.2). Recorde-se que uma configuração representa o conjunto de vértices ocupados pelos policiais e pelo ladrão. Quando k policiais estão a jogar, existem $O(n^{k+1})$ configurações. O *grafo de configurações* tem como conjunto de vértices o conjunto de todas as configurações e duas configurações $(c_1, \dots, c_k, r)$ e $(c'_1, \dots, c'_k, r')$ são adjacentes se for possível ir de uma para a outra durante um passo do jogo, i.e, $r' \in N[r]$ e $c'_i \in N[c_i]$ para qualquer $i \leq k$. As configurações $(c_1, \dots, c_k, r)$ com $r \in N[c_i]$ para algum $i \leq k$ chamam-se *final* e estão identificadas com 0. Agora, uma configuração $(c_1, \dots, c_k, r)$ está etiquetada com $i > 0$ se para qualquer $r' \in N[r]$ existir $(c'_1, \dots, c'_k)$, $c'_i \in N[c_i]$ para qualquer $i \leq k$, tal que $(c'_1, \dots, c'_k, r')$ está etiquetada com no máximo $i - 1$. Com tal etiquetagem, é fácil ver que k policiais podem vencer em G se e só se existirem $\{c_1, \dots, c_k\} \in V^k$ tais que, para qualquer $r \in V$, a configuração $(c_1, \dots, c_k, r)$ recebeu uma etiqueta finita. Isto pode ser claramente verificado em tempo polinomial no tamanho $n^{O(k)}$ do grafo das configurações. O problema de generalizar a caracterização de grafos cop-win para grafos com *cop number* k foi extensivamente estudado (por exemplo, Beaudou 2004). Grafos com *cop number* no máximo $k \geq 1$ foram caracterizados em Berarducci e Intrigila 1993; Hahn e MacGillivray 2006; Clarke e MacGillivray 2012.

Surpreendentemente, passou-se muito tempo antes de aparecerem outros resultados de complexidade. Foi demonstrado que o problema de calcular o *cop number* de grafos é NP-difícil, e mesmo W[2]-hard em Fomin, Golovach e Kratochvíl 2008; Fomin, Golovach, Kratochvíl et al. 2010. Em particular, o problema não é FPT (não há algoritmo em tempo de execução $f(k)n^{O(1)}$ para decidir se um grafo com n vértices tem *cop number* no máximo k), a menos que a hierarquia de complexidade colapse. Além disso, Fomin, Golovach e Kratochvíl 2008; Fomin, Golovach, Kratochvíl et al. 2010 provou que o *cop number* de grafos de n -vértices não pode ser aproximado até uma razão $O(\log n)$ em tempo polinomial. O problema de aproximar até uma razão $O(n^{1-\epsilon})$ para $\epsilon > 0$ ainda está em aberto. Ao contrário de muitos problemas de otimização “clássicos”, provar que o cálculo do *cop number* é NP-difícil não é o último passo. De fato, o que dizer da pertença a NP? Por outras palavras, a questão de saber se este problema pertence a NP é bastante difícil. Começou-se por provar que o jogo do $\mathcal{C}\&\mathcal{R}$ é PSPACE-completo quando a cada policial é permitido mover-se um número limitado de vezes (Fomin, Golovach e Lokshtanov 2010). Depois, Mamino 2013 provou que o jogo do $\mathcal{C}\&\mathcal{R}$ é PSPACE-difícil. O ponto-chave da prova de Mamino é a definição de um jogo generalizado em grafos com etiquetas de arestas, onde as arestas são etiquetadas como *protegidas* ou *não-protegidas* e o ladrão é capturado se um policial chegar à sua posição através de uma aresta desprotegida. As arestas protegidas permitem dar mais liberdade ao ladrão, o que era o elemento que faltava para obter este resultado de complexidade (até então, a maioria dos resultados de complexidade eram em grafos dirigidos porque permitiam “controlar” a trajetória do ladrão). Finalmente, Kinnersley 2015 provou que o problema é EXPTIME-completo.

A conjectura de Meyniel

Embora os resultados anteriormente mencionados mostrem que o cálculo do *cop number* de grafos é difícil em geral, o *cop number* depende muito das propriedades estruturais do grafo considerado. Na próxima subseção, analisamos os resultados que mostram que as propriedades dos grafos permitem dar limites superiores ao *cop number*. Em primeiro lugar, descrevemos os limites inferiores do *cop number* derivados das propriedades dos grafos. Ou seja, mostramos como a estrutura de um grafo pode facilitar a vida do ladrão.

Lembre que a cintura (*girth*) de um grafo é o tamanho do menor ciclo induzido. Claramente, quanto maior for o grau mínimo de um grafo, mais formas de fuga tem o ladrão. Se, além disso, não existirem ciclos curtos no grafo, os policiais não podem “cercar” facilmente o ladrão. Assim, o grau mínimo e a cintura são parâmetros naturais que determinam se são necessários muitos policiais para capturar o ladrão. Mais formalmente,

Teorema 9.2 (Aigner e Fromme 1984). *Seja G um grafo com grau mínimo δ e cintura ≥ 5 . Então $\text{cn}(G) \geq \delta$.*

Vamos esboçar a prova do teorema acima. Considere um grafo G com grau mínimo δ e cintura de pelo menos 5. Primeiro, a dimensão de qualquer conjunto dominante em grafos sem ciclos curtos é pelo menos o seu grau mínimo. Assim, o ladrão tem uma posição inicial segura v . Agora, seja v a posição atual do ladrão na sua vez de jogar. Então, porque G não contém triângulos nem quadrados, $N(v)$ é um conjunto estável e v é o único vizinho comum de quaisquer dois vértices em $N(v)$. Assim, se houver estritamente menos de δ policiais disponíveis, um cálculo simples implica que existe um vizinho w de v tal que nenhum policial ocupa um vértice em $N[w]$: o ladrão pode ir em segurança para w .

O resultado de Aigner e Fromme (1984) foi mais tarde generalizado por Frankl (1987a). Sua ideia é que, num grafo com cintura grande, o subgrafo dos vértices à distância “pequena” de qualquer vértice v assemelha-se a uma árvore T_v . Grosso modo, se o ladrão partir de um vértice v com um ramo de T_v que não contenha policiais, então o ladrão pode alcançar, num número finito de passos e sem ser capturado, outro vértice que satisfaça a mesma propriedade. Continuar desta forma fornece uma estratégia de fuga para o ladrão.

Teorema 9.3 (Frankl 1987a). *Seja G um grafo com grau mínimo de pelo menos δ e com cintura de pelo menos $8t - 3$. Então, $\text{cn}(G) > \delta^t$.*

Os teoremas 9.2 e 9.3 são importantes porque mostram que o *cop number* não é limitado em geral. De fato, para qualquer $\delta \in \mathbb{N}$, existe um grafo com grau mínimo δ e cintura de pelo menos 5. Em particular, para um valor arbitrário de n , existem grafos $\Omega(\sqrt{n})$ -regulares com cintura de pelo menos 5. Por exemplo, em Abreu et al. 2008, é descrita uma família de grafos $(p^m + 2)$ -regulares de cintura 5 e de ordem $2p^{2m}$, $p \geq 5$ primo. Daí,

Corolário 9.4. *Para um valor arbitrário de n , existem grafos de n vértices G com $\text{cn}(G) = \Omega(\sqrt{n})$.*

Outras classes de grafos atingem a mesma ordem de grandeza para o *cop number*. Por exemplo, o plano projetivo, visto como o grafo bipartido com $2(q^2 + q + 1)$ vértices (pontos e linhas) e onde as arestas correspondem à relação de incidência, é $q + 1$ -regular e tem uma cintura de pelo menos 5, pelo que tem um *cop number* de pelo menos $q + 1$ (Bollobás, Kun e Leader 2013; L. Lu e Peng 2012).

Como se mostra na seção seguinte, o *cop number* de muitas classes de grafos parece ser limitado. O caso dos grafos com ordem pequena (no máximo 10 vértices) foi estudado em Baird, Beveridge et al. 2014. No entanto, limitar o *cop number* de qualquer grafo continua a ser um problema difícil. Assim, embora o *cop number* de qualquer grafo G seja trivialmente limitado pela dimensão mínima de um conjunto dominante de G , um limite superior geral do *cop number* de G em termos da sua ordem é um problema pendente há quatro anos. Em 1987, Frankl (1987a) mencionou a seguinte conjectura de Henri Meyniel:

Conjectura 2 (Meyniel; Frankl 1987a). Para qualquer grafo de n vértices G , $\text{cn}(G) = O(\sqrt{n})$.

Durante os últimos anos, foram estudadas muitas outras variantes de jogos de policiais e Ladrões, principalmente para trazer novas provas e técnicas para tentar provar a conjectura de Meyniel.

9.3 Polícia e Ladrão em Classes de Grafos

Esta seção analisa o trabalho que mostra que o *cop number* é limitado em muitas classes de grafos. Principalmente, o *cop number* foi limitado em termos de outros parâmetros do grafo (por exemplo, genus, largura da árvore, cordalidade, etc.). Assim, na classe de grafos em que o invariante do grafo considerado é limitado, o *cop number* também é limitado e, em particular, o seu cálculo é polinomial. Por exemplo, em grafos com um conjunto dominante de tamanho no máximo k , o *cop number* é trivialmente no máximo k .

Grau máximo e diâmetro não ajudam

Começamos por recordar que o *cop number* não é limitado mesmo em grafos com grau máximo no máximo três ou com diâmetro no máximo dois.

Andreae responde a uma pergunta em Aigner e Fromme 1984 mostrando que o grau máximo não é um limite superior geral para o *cop number*. Para o fazer, Andreae (1984) utiliza o fato de existirem grafos regulares com cintura arbitrariamente grande e, em seguida, o resultado é válido pelo Teorema 9.3.

Teorema 9.5 (Andreae 1984). *Para qualquer $\Delta, k \geq 3$, existe um grafo Δ -regular G com $\text{cn}(G) \geq k$.*

Mesmo para grafos com diâmetro de 2, o *cop number* não pode ser limitado por uma constante. Este resultado parece ser bem conhecido como folclore (Exercício 9.3).

Lema 9.6 (folclore). *Para qualquer $k \geq 1$, existe um grafo $\binom{3k}{k}$ -vértice $\binom{2k}{k}$ -regular G com diâmetro 2 e $\text{cn}(G) \geq k$.*

Embora o diâmetro e o grau máximo sejam inúteis para limitar o número de policiais, há muitas classes de grafos ricas em que são necessários poucos policiais para capturar o ladrão. Como já foi referido, a classe dos grafos de conjuntos dominantes de tamanho limitado é um exemplo.

Grafos com genus limitado e grafos excluindo algum menor fixo

Aigner e Fromme (1984) foram os primeiros a usar vários policiais para capturar o ladrão. Para isso, fizeram com que os policiais colaborassem da seguinte forma: um policial “controla” um subgrafo que separa o grafo, enquanto os outros policiais podem ir em direção à componente ocupada pelo ladrão. Mais formalmente, alguns policiais *controlam* um subgrafo H do grafo G , se existir uma estratégia, tal que, após um número finito de passos, estes policiais garantam que o ladrão não pode ir para um vértice de H sem ser capturado imediatamente no próximo movimento dos policiais. Por exemplo, um policial pode controlar qualquer estrela arbitrariamente grande. A ideia principal de Aigner e Fromme 1984 é que um policial é suficiente para controlar qualquer caminho mais curto num grafo.

Controlando um caminho mais curto. Este resultado é a pedra angular da maioria das estratégias de captura descritas a seguir. Por isso, damos mais pormenores sobre ele. A ideia da prova é que, dado um caminho mais curto P num grafo, se, em algum passo em que o ladrão ocupa um vértice r , o policial estiver a ocupar um vértice $c \in V(P)$ que satisfaça $d(r, z) \geq d(c, z)$

para todos os $z \in V(P)$, então, qualquer que seja o próximo movimento do ladrão para $r' \in N[r]$, existe um vizinho de $c' \in N[c]$ que preserva a propriedade. Esse vértice c de P chama-se a *sombra* da posição r do ladrão em P . Por outras palavras, quando o policial chega à sombra do ladrão, pode sempre seguir a sombra do ladrão. É claro que se o ladrão chegar a um vértice de P quando o policial está a ocupar a sua sombra, então o ladrão é capturado no passo seguinte. Além disso, é fácil mostrar que o policial pode alcançar a sombra do ladrão num número finito de passos.

Grades. Como exemplo, considere uma grade onde um policial ocupa a mesma linha que o ladrão. Este policial pode permanecer sempre na mesma linha (não permitindo que a distância para o ladrão aumente) e garantir que se o ladrão chegar à coluna do policial será capturado no passo seguinte. Usando esta propriedade, é fácil provar que dois policiais são suficientes para capturar o ladrão em qualquer grade: uma possível estratégia vencedora é um policial controlar uma coluna enquanto o segundo policial alcança a coluna seguinte (na direção do ladrão) até a controlar. Depois, os papéis dos dois policiais invertem-se. Como um policial não é obviamente suficiente para capturar o ladrão em qualquer grade, então $\text{cn}(G) = 2$ para qualquer grade G do tipo $p \times q$ com $p, q \geq 2$.

Grafos com genus limitado. O principal resultado de Aigner e Fromme (1984) é que três policiais são suficientes para capturar um ladrão em qualquer grafo planar. Este resultado surpreendente segue os fatos de que um policial pode controlar qualquer caminho mais curto e que existe sempre um separador que consiste em três caminhos mais curtos em grafos planares (Lipton e Tarjan 1980). Grosso modo, em qualquer grafo planar, dois caminhos mais curtos que formam um ciclo (separador) podem ser controlados por dois policiais que, assim, isolam o ladrão numa parte mais pequena do grafo. Em seguida, um terceiro policial é enviado para controlar um novo caminho mais curto para separar a zona acessível ao ladrão, e assim por diante, recursivamente. Daí,

Teorema 9.7 (Aigner e Fromme 1984). $\text{cn}(G) \leq 3$ para todo grafo planar.

Além disso, este limite é apertado (Exercício 9.4).

Usando o fato de que a remoção de um ciclo incontratável permite diminuir o genus g de um grafo, Quilliot 1985 usa no máximo $2g$ policiais para reduzir recursivamente o genus da componente onde está o ladrão.

Depois, 3 policiais restantes são usados para capturar o ladrão na componente planar onde ele se encontra. Assim, $2g + 3$ policiais são suficientes para capturar um ladrão em qualquer grafo com genus máximo de g . Ao estudar mais cuidadosamente a forma de lidar com os separadores do caminho mais curto para reduzir gradualmente o genus da zona acessível ao ladrão, Schröder melhorou este limite:

Teorema 9.8 (Schröder 2001). $\text{cn}(G) \leq \lfloor \frac{3g}{2} \rfloor + 3$ em grafos com genus g .

O caso das superfícies não orientáveis foi considerado em Clarke, Fiorini et al. 2012. No entanto, o melhor limite inferior para grafos com genus limitado está longe de ser o limite superior. Por exemplo, o plano projetivo tem um genus $g = \Omega(n)$ (devido ao seu número de arestas) e, por conseguinte, o seu *cop number* é $\Theta(\sqrt{g})$. Assim, a seguinte conjectura continua em aberto mesmo para grafos com genus $g = 2$:

Conjectura 3. Para qualquer grafo G com genus g , $\text{cn}(G) \leq g + 3$.

Recentemente, Lehner 2021 provou que os grafos toroidais (genus 1) têm *cop number* no máximo 3.

Outra grande classe de grafos tem um *cop number* limitado: qualquer grafo que exclua um menor com um número limitado de arestas. Recorde-se que um *minor* de um grafo G é qualquer subgrafo de um grafo obtido a partir de G depois de contrair sequencialmente algumas arestas. Dado um grafo G sem menor H , Andreae (1986) utiliza os caminhos mais curtos para “representar” de alguma forma as arestas do grafo H em G . Uma vez que H não é um menor de G , a dada altura, este conjunto de caminhos separa o grafo, e isto pode ser feito recursivamente.

Teorema 9.9 (Andreae 1986). *Seja H um grafo qualquer e v um vértice não isolado em H . Então, para qualquer grafo G excluindo H como menor, $\text{cn}(G) \leq |E(H \setminus v)|$.*

Note-se que este resultado foi utilizado para calcular uma decomposição particular para grafos livres de menores (Abraham et al. 2019).

Usando argumentos semelhantes, Andreae 1986 deu grafos explícitos H para os quais qualquer grafo G excluindo H como menor é tal que $\text{cn}(G) \leq 3$. Além disso, $\text{cn}(G) \leq \lceil n/3 \rceil + 1$ para qualquer grafo G sem roda W_n como menor (Andreae 1986).

Largura de árvore, cordalidade, grafos bipartidos e outros

Os *cop numbers* de muitas classes de grafos foram estudados, tais como o *cop number* dos grafos de Cayley (Frankl 1987b; Hamidoune 1987; Hamidoune 1987), de vários produtos de grafos (Tosić 1988; Maamoun e Meyniel 1987; Neufeld e Nowakowski 1998), de grafos com dimensão isométrica forte dois (Fitzpatrick e Nowakowski 2001). Além disso, os grafos série-paralelos têm *cop number* no máximo dois (D. Theis 2008). Mais geralmente, não é difícil mostrar que grafos G com largura de árvore limitada $tw(G)$ têm *cop number* no máximo $tw(G)/2 + 1$ (Joret, Kaminski e D. O. Theis 2010; Bonato, Clarke et al. 2014). Além disso, é no máximo k em qualquer grafo de largura de clique no máximo k (Fomin, Golovach e Kratochvíl 2008; Fomin, Golovach, Kratochvíl et al. 2010). O *cop number* de grafos de interseção de objetos geométricos também foi estudado (e.g., Das e Gahlawat 2022).

L. Lu e Peng 2012 provou a conjectura de Meyniel para grafos com diâmetro de no máximo 2 e para grafos bipartidos com diâmetro de no máximo 3. Mais precisamente, L. Lu e Peng 2012 provou por indução em $|V(H)|$ que, se o ladrão estiver limitado a mover-se nos vértices de um subgrafo H degenerado em k de G , então k policiais podem capturar o ladrão. Assim, se existe $S \subseteq V$ tal que $G \setminus N(S)$ é k -degenerado, então $cn(G) \leq |S| + k$. Os policiais são colocados uniformemente ao acaso nos vértices do núcleo k de G (subgrafo máximo de G com todos os vértices com grau pelo menos $k + 1$) até os policiais dominarem todos os vértices em K . Depois, k policiais extra podem capturar o ladrão em $G \setminus K$. O número esperado de policiais para dominar o núcleo $\sqrt{n}$ de G é no máximo $\sqrt{n}$ (L. Lu e Peng 2012). Daí:

Teorema 9.10 (L. Lu e Peng 2012). *Para qualquer grafo de n vértices G com diâmetro no máximo 2, ou que seja bipartido com diâmetro 3, $cn(G) \leq 2\sqrt{n} - 1$.*

Embora o menor ciclo induzido conduza a um limite inferior do *cop number*, estranhamente, pouco se sabe sobre o maior ciclo induzido (cordalidade). Um grafo é k -cordal se o seu maior ciclo induzido tiver um comprimento máximo de k . Em Aigner e Fromme 1984, mostra-se que $cn(G) \leq 3$ para qualquer grafo 2-conectado 5-cordal G . Kosowski et al. 2014 generaliza este resultado mostrando que $cn(G) \leq k - 1$ para qualquer grafo k -cordal conexo G . Este resultado estende de alguma forma o modelo em Clarke e Nowakowski 2005, onde os autores consideram o jogo em que

dois policiais que permanecem sempre a uma distância máxima de 2 um do outro têm de capturar um ladrão. É possível melhorar o seu resultado no caso de grafos de 4 cordas, i.e. para $k = 4$ (Exercício 9.5).

Grafos aleatórios

O *cop number* de grafos aleatórios tem sido intensamente investigado. Para além do fato de muitas redes reais partilharem propriedades estruturais importantes de classes particulares de grafos aleatórios (e, por conseguinte, o estudo do *cop number* dessas classes dar pistas sobre o *cop number* de redes reais), alguns destes estudos forneceram novas técnicas que foram utilizadas para limitar o *cop number* de grafos gerais (ver abaixo).

Os grafos Erdős-Rényi foram investigados pela primeira vez em Bonato, Hahn e Wang 2007 (ver também Bonato, Kemkes e Pralat 2012). Num grafo deste tipo $G(n, p)$, cada aresta tem uma probabilidade independente e fixa (independente do número n de vértices) de existir $0 < p < 1$. Nesse caso, está provado que o *cop number* é $\Theta(\log n)$ *assintoticamente quase certo* (a.a.s.), i.e., com probabilidade tendente a um quando n vai para infinito. Este resultado (claramente, o limite superior) baseia-se principalmente em resultados semelhantes sobre o número dominante de tais grafos. Mais precisamente,

Teorema 9.11 (Bonato, Hahn e Wang 2007). *Para qualquer $0 < p < 1$ fixo e para qualquer $\epsilon > 0$, a.a.s.:*

$$(1 - \epsilon) \log_{\frac{1}{1-p}} n \leq \text{cn}(G(n, p)) \leq (1 + \epsilon) \log_{\frac{1}{1-p}} n.$$

Depois, os grafos aleatórios esparsos (onde $p = d/n$, $0 < d < 1$) foram estudados em Bonato, Pralat e Wang 2007. Grosso modo, esses grafos de n -vértices consistem na união de árvores ou grafos unicíclicos com um máximo de $\log \log n$ vértices a.a.s. Como Bonato, Pralat e Wang (2007) definem o *cop number* de um grafo desconexo como a soma dos *cop numbers* de suas componentes conexas, os grafos aleatórios esparsos têm *cop numbers* a.a.s. grandes.

O caso dos grafos mais densos, para os quais $pn = n^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, foi estudado pela primeira vez em Bollobás, Kun e Leader 2013. Depois, Luczak e Pralat (2010) provaram que o *cop number* de grafos aleatórios densos tem um comportamento intrigante de “zig-zag”:

Teorema 9.12 (Luczak e Pralat 2010). *Seja $0 < \alpha < 1$ e $d = n \cdot p = n^{\alpha+o(1)}$.*

- *Se $\frac{1}{2j+1} < \alpha < \frac{1}{2j}$ para algum $j \geq 1$, então a.a.s. $\text{cn}(G(n, p)) = \Theta(d^j)$.*
- *Se $\frac{1}{2j} < \alpha < \frac{1}{2j-1}$ para algum $j \geq 1$, então a.a.s. $\Omega(\frac{n}{d^j}) = \text{cn}(G(n, p)) = \Theta(\frac{n}{d^j} \log n)$.*

Finalmente, os grafos aleatórios com uma dada distribuição de graus foram investigados em Bonato, Pralat e Wang 2007. Dada uma sequência $w = (w_1, \dots, w_n)$ onde w_i é o grau esperado do vértice v_i :

Lema 9.13 (Bonato, Pralat e Wang 2007). *Seja G um grafo aleatório com distribuição de graus esperados w . Seja $p \geq \frac{\max_i w_i^2}{\sum_i w_i}$. Para qualquer $\epsilon > 0$, com probabilidade pelo menos $1 - e^{-\Theta(n^\epsilon)}$:*

$$\text{cn}(G) \geq (1 - \epsilon) \log_{\frac{1}{1-p}} n.$$

O caso de w ser uma distribuição de lei de potência é particularmente interessante, uma vez que muitas redes reais têm esta propriedade. Como esses grafos têm muitos vértices isolados, Bonato, Pralat e Wang 2007 conclui que o seu *cop number* é $\Theta(n)$, em que n é o número de vértices. Por outro lado, os grafos regulares-aleatórios são considerados em Pralat, Verstraëte e N. C. Wormald 2011. Depois, Pralat e N. Wormald 2016 provou que a Conjectura de Meyniel é válida para grafos aleatórios binomiais. Em particular, Pralat e N. Wormald 2016 provou que a conjectura é válida para uma classe geral de grafos com algumas propriedades específicas do tipo expansão.

Grafos gerais

Mostramos acima que a conjectura de Meyniel é válida em muitas classes de grafos. No entanto, a questão ainda está em aberto, em grafos gerais.

O primeiro limite superior para grafos gerais foi proposto por Frankl 1987a, que mostrou que $\text{cn}(G) = O(n^{\frac{\log \log n}{\log n}})$ em qualquer grafo de n vértices G . Este limite foi depois melhorado para $O(\frac{n}{\log n})$ em Chiniforooshan 2008 encontrando recursivamente uma lagarta de distância mínima longa entre a raiz e uma folha de uma qualquer árvore BFS arbitrária de G . Mais precisamente, um subgrafo T de G é uma *lagarta de distância mínima* se consistir num caminho P mais curto (em G) e alguns vértices adjacentes

a P . Generalizando o fato de que um policial pode controlar um caminho mais curto, Chiniforooshan (2008) mostrou que 5 policiais são suficientes para controlar qualquer lagarta de distância mínima num grafo. Depois, usando qualquer árvore BFS, é possível calcular uma lagarta de distância mínima (da raiz a uma folha da árvore BFS) com tamanho $O(\log n)$ em qualquer grafo com n vértices. Continuando recursivamente, qualquer grafo pode ser particionado em $O(n/\log n)$ lagartas de distância mínima. Assim, $\text{cn}(G) = O(\frac{n}{\log n})$ em qualquer grafo de n vértices G .

Vários grupos de pesquisa melhoraram independentemente este resultado para obter o melhor limite atual:

Teorema 9.14 (Scott e Sudakov 2011; L. Lu e Peng 2012). *Para qualquer grafo conexo de n vértices G , $\text{cn}(G) = O\left(\frac{n}{2^{(1-o(1))\sqrt{\log n}}}\right)$.*

Assim, a conjectura de Meyniel continua em aberto, pois pergunta se $\text{cn}(G) = O(n^{1/2})$ para qualquer grafo de n vértices, enquanto o teorema acima dá um limite superior que é $\Omega(n^{1-\epsilon})$ para cada $\epsilon > 0$.

9.4 Variantes do Jogo de Polícia e Ladrão

Neste capítulo, apresentamos os principais resultados básicos sobre o jogo de Polícia e Ladrão. Nesta breve introdução, não nos foi possível fazer um levantamento da vastíssima literatura sobre este jogo. Nesta última seção, gostaríamos de apresentar uma lista (não exaustiva) dos numerosos trabalhos nesta área. Na maior parte dos casos, muitas questões permanecem em aberto e esperamos que inspire o leitor a prosseguir a investigação nesta área.

Mais classes de grafos

O jogo dos policiais e dos ladrões tem sido estudado em muitas classes de grafos, mas também em ambientes mais gerais, tais como grafos infinitos (Chastand, Laviolette e Polat 2000; Hahn, Laviolette et al. 2002; Bonato, Hahn e Wang 2007; Bonato, Hahn e Tardif 2010) ou em grafos dirigidos onde apenas se conhecem muito poucos resultados (Das, Gahlawat et al. 2021).

Mais variantes

Gostaríamos de mencionar algumas das numerosas variantes que têm sido estudadas: quando o ladrão é mais rápido (Fomin, Golovach, Kratochvíl et al. 2010; Chalopin et al. 2011; Alon e Mehrabian 2011; Mehrabian 2011; A. M. Frieze, Krivelevich e Loh 2012; Balister et al. 2017); quando a visibilidade dos policiais é limitada (Clarke 2009; Chalopin et al. 2011); quando o objetivo dos policiais não é capturar o ladrão mas evitar que ele chegue a um determinado subgrafo (Fomin, Golovach, Hall et al. 2011; Sámal e Valla 2014); quando o objetivo dos policiais não é capturar o ladrão mas sim manter-se sempre perto dele (Cohen, Martins et al. 2018; Cohen, Mc Inerney et al. 2020; Costa, Martins e Sampaio 2022); quando cada policial tem um número limitado de movimentos (Fomin, Golovach e Lokshtanov 2010; Fomin, Golovach e Lokshtanov 2012), quando os policiais podem ser ajudados por armadilhas ou radares (Clarke e Nowakowski 2000; Clarke e Nowakowski 2001; Clarke e Connon 2006) etc. Além disso, são considerados outros objetivos, como o tempo de captura (Bonato, Golovach et al. 2009; Bonato, Gordinowicz et al. 2013; Bonato, Huggan et al. 2021).

Jogos estreitamente relacionados

Os jogos de policiais e ladrões fazem parte de uma classe mais vasta de jogos de perseguição e evasão, alguns dos quais estão intimamente relacionados com invariantes de grafos famosos, como a largura da árvore e a largura do caminho (ver, por exemplo, o estudo de Nisse 2019). Existem também jogos combinatórios em que apenas um dos jogadores move uma ficha num grafo, enquanto o segundo jogador seleciona (ou sonda) vértices.

Por exemplo, no *jogo de vigilância*, o segundo jogador controla uma ficha que começa num vértice específico (a *homebase*) de um grafo G . Todos os vértices de G (exceto a base) são inicialmente marcados. Em cada jogada, o primeiro jogador desmarca k vértices (k é um parâmetro fixo do jogo) e depois o segundo jogador pode mover a sua ficha ao longo de uma aresta. O segundo jogador ganha se eventualmente atingir um vértice marcado (Fomin, Giroire et al. 2014; Giroire et al. 2015). É interessante notar que o jogo de vigilância foi introduzido para fins práticos, nomeadamente para estudar problemas de busca antecipada (*Prefetching*).

Um último exemplo que gostaríamos de dar aqui é o jogo *Caçador e Coelho* (*Hunter and Rabbit*) em que um jogador controla um coelho invisível

escondido num vértice de um grafo. Em cada jogada, o outro jogador sonda k vértices (k é um parâmetro fixo do jogo). Se o coelho ocupar um vértice sondado, perde. Caso contrário, o coelho deve deslocar-se para um dos seus vizinhos (Britnell e Wildon 2013; Gruslys e Méroueh 2015; Abramovskaya et al. 2016; Bolkema e Groothuis 2019; Dissaux et al. 2023). (Exercício 9.6).

9.5 Exercícios

Exercício 9.1. Mostre que $\text{cn}(G) = 2$ para qualquer grade G com pelo menos 2 linhas e duas colunas.

Exercício 9.2. Prove o Teorema 9.1 formalmente.

Exercício 9.3. Prove que, para cada $k \geq 1$, existe um grafo G com diâmetro 2 e $\text{cn}(G) \geq k$.

Exercício 9.4. Mostre um grafo planar G tal que $\text{cn}(G) = 3$.

Exercício 9.5. Mostre que, em qualquer grafo conectado 4-cordal G , $\text{cn}(G) \leq 2$ e que existe sempre uma estratégia vencedora para os policiais tal que eles estão sempre a uma distância máxima de um um dos outros.

Exercício 9.6. Mostre que um caçador (i.e., um jogador que sonda um vértice por turno) tem uma estratégia vencedora em qualquer caminho no jogo do Caçador e do Coelho.

Parte III

**Grupo de Conway
dos Jogos
Combinatórios**

10

Jogos Normais Partizan em Grafos

*“I am also interested in wasting time, professionally, and
I have invented some very powerful ways of wasting time.
One of these is Combinatorial Game Theory”*

John H. Conway, 2002

A Teoria de Sprague-Grundy (Capítulo 2) associa valores (números) a posições de jogos imparciais (na variante normal) e, com isso, consegue decidir qual jogador tem estratégia vencedora. Neste capítulo, apresentamos a Teoria Combinatória dos Jogos, que estende a Teoria de Sprague-Grundy, associando também valores a posições de jogos partizan (na variante normal), onde o valor 0 também indica que o primeiro a jogar perde, independentemente se for Alice ou Bob. Esta teoria é desenvolvida magistralmente no livro *Winning Ways* de Berlekamp, Conway e Guy (1982). Para maiores detalhes, recomendamos também o excelente livro de Siegel (2013).

Tais valores associados a jogos na variante normal pertencem a um grupo abeliano¹ criado por Conway, que inclui os *números surreais*, capaz de representar jogos infinitos. Neste livro, nós nos concentramos em jogos combinatórios, que são finitos, e portanto veremos apenas parte do grupo de Conway, chamado *Pequeno Grupo de Conway* (*short Conway group*). Não pretendemos cobrir completamente esta teoria, que é muito vasta, mas mostramos seus elementos essenciais, que podem ser aplicados para obtenção de algoritmos polinomiais para solucionar problemas de jogos partizan em grafos (na variante normal).

¹ Um grupo abeliano $\mathcal{A}$ é um conjunto de elementos com uma operação $+$ comutativa e associativa, com elemento neutro $0 \in \mathcal{A}$, tal que $x + y \in \mathcal{A}$, $x + 0 = x$ e existe $-x \in \mathcal{A}$ satisfazendo $x + (-x) = 0$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$.

Antes de iniciar a teoria, é bom começar com alguns exemplos ilustrativos do jogo NIM-PARTIZAN, definido no Capítulo 1. Em alguns jogos, Alice (resp. Bob) sempre vence, sendo ou não a primeira a jogar. Em outros jogos, Alice perde se e só se joga primeiro. E também há jogos em que Alice vence se e só se joga primeiro. Como dito, todo jogo será associado a um valor (do grupo de Conway). O objetivo é determinar o vencedor (Alice, Bob, o primeiro jogador ou o segundo jogador) a partir do valor associado ao jogo. Um ponto crucial é que todo jogo em que o primeiro a jogar perde sempre tem valor 0. Como exemplo concreto, no jogo (A, B) de NIM-PARTIZAN (uma pilha com um objeto rotulado A e outra pilha com um objeto rotulado B), o primeiro a jogar perde e portanto (A, B) tem valor 0, assim como os jogos (AA, BB) , (AB, BA) e (C, C) .

Veremos que todo inteiro n será associado a um jogo, que (abusando da notação) será chamado de jogo n e intuitivamente representa qualquer jogo com valor n . Por exemplo, veremos que a instância do jogo NIM-PARTIZAN $(A...A)$ (uma pilha com n objetos rotulados A) tem valor n e a instância $(B...B)$ (uma pilha com n objetos rotulados B) tem valor $-n$. Um fato importante é que, quanto maior (resp. menor) que 0 for o valor do jogo, mais favorável será para Alice (resp. Bob). Isso permite obter estratégias para ambos os jogadores: Alice (Bob) sempre deseja jogar de modo a obter um jogo com maior (resp. menor) valor.

Outro ponto crucial (similar à Teoria de Sprague-Grundy) é avaliar o jogo $X + Y$, obtido da soma de dois jogos partizan X e Y , onde, em cada turno, o jogador pode fazer a sua jogada em qualquer um dos dois jogos X ou Y . De fato, o valor do jogo $X + Y$ será consistente com a soma dos valores correspondentes aos jogos X e Y . Por exemplo, vimos que as instâncias (AAA) e (BBB) tem valores 3 e -3 (ou seja, são *equivalentes* aos jogos 3 e -3). Veremos que o jogo $(AAA) + (BBB) = (AAA, BBB)$ (duas pilhas: uma com 3 elementos rotulados A e outra com 3 elementos rotulados B) tem valor $3 + (-3) = 0$, o que é consistente com o fato de que o primeiro a jogar perde em (AAA, BBB) .

Veremos que o grupo de Conway não contém apenas números inteiros, mas também números diádicos (números racionais cujo denominador é uma potência de 2). Por exemplo, o Exercício 10.1 pede para provar que perde quem jogar primeiro na instância de NIM-PARTIZAN $(B) + (AB) + (AB) = (B, AB, AB)$ (três pilhas, uma com um objeto rotulado B e duas pilhas com dois objetos cada: um rotulado A embaixo e outro rotulado B em

cima). Portanto, o valor do jogo $(B) + (AB) + (AB)$ é 0. Como o valor do jogo (B) é -1 , concluiremos que o valor do jogo (AB) deve ser $\frac{1}{2}$. De modo semelhante, podemos mostrar que o jogo (BA) tem valor $-\frac{1}{2}$. Provando no Exercício 10.1 que o primeiro a jogar perde no jogo (BA, ABB, ABB) , concluiremos que os valores dos jogos (ABB) e (BAA) serão $\frac{1}{4}$ e $-\frac{1}{4}$, respectivamente. Ver Lema 10.7 para maiores detalhes. Generalizando, prova-se que $(AB \dots B)$ tem valor $1/2^n$, onde n é o número de B 's (Exercício 10.2).

Grosso modo, todo jogo associado a um número diádico será chamado de *jogo número* ou simplesmente *número*. Depois, veremos que o grupo de Conway também contém jogos que não são *números*. Como exemplo de jogos que não são números, note que o primeiro a jogar vence nas instâncias de NIM-PARTIZAN (C) , (CC) e (CCC) de apenas uma pilha com 1, 2 ou 3 objetos rotulados com C . Seus valores serão $*1$ (ou só estrela $*$), $*2$ e $*3$, definidos adiante e diretamente ligados aos nimbers 1, 2 e 3. Note que o primeiro a jogar perde na instância (C, CC, CCC) , que tem valor 0, e portanto $*1 + *2 + *3 = 0$ (ou seja, a soma de nimbers é a operação xor bit-a-bit, como visto no Capítulo 2).

Tais jogos que não são números serão classificados como jogos quase-números (incluindo os jogos infinitesimais) e jogos quentes, ampliando ainda mais a nossa noção do grupo de Conway. Sobre jogos quase-números, veremos que resultados importantes (Teoremas 10.17 e 10.22) mostram que os jogadores desejam evitar ao máximo obter um jogo número em sua jogada. Sobre jogos quentes, veremos que a Teoria da Temperatura na Seção 10.5 ajuda a escolher uma boa jogada. Finalmente, concluímos o capítulo com aplicações dessa teoria para alguns jogos em grafos nas Seções 10.6 e 10.7.

10.1 Notação $\{X|Y\}$ e a Soma de Jogos

Com o objetivo de estender a Teoria de Sprague-Grundy para jogos partizan, Conway (1976) criou um sistema numérico inteiramente novo, o *Grupo de Conway*². Esse conjunto contém números reais, mas também contém elementos novos, como a estrela $* = \{0|0\}$ e os infinitesimais $\uparrow = \{0|*\}$ e $\downarrow = \{*\|0\}$, definidos nesta seção. Além disso, não há uma ordem total entre seus elementos; por exemplo, a estrela $*$ é *incomparável* com 0

² Como já dito, concentramo-nos no subconjunto dos jogos combinatórios, que são finitos, também chamado de *Pequeno Grupo de Conway* (*short Conway group*).

(denota-se $* \parallel 0$), ou seja, $* \not\prec 0$ e $* \not\succ 0$. Um ponto interessante que será mostrado é que um número real x representa um jogo combinatório se e só se x é um *número diádico* (seu denominador é uma potência de 2, incluindo assim também os inteiros).

Conway (1976) prova que é possível associar um valor s para cada posição de um jogo imparcial ou partizan (na variante normal) em termos de jogadas de vantagem para Alice de modo que vale o seguinte:

- $s > 0 \Leftrightarrow$ Alice vence (jogando primeiro ou não);
- $s < 0 \Leftrightarrow$ Bob vence (jogando primeiro ou não);
- $s = 0 \Leftrightarrow$ o segundo jogador vence;
- $s \parallel 0 \Leftrightarrow$ o primeiro jogador vence.

Usamos frequentemente o seguinte (maiores detalhes em Conway (1976)): se Alice em sua jogada pode obter duas posições com valores $s' < s$, então ela prefere a jogada que retorna o maior valor s . Por outro lado, Bob prefere em sua jogada obter um jogo com menor valor possível. A seguir, introduzimos gradualmente elementos do grupo de Conway e jogos correspondentes.

Notação $\{X|Y\}$

Dado um jogo³ J , sejam $\mathcal{J}^A$ e $\mathcal{J}^B$ as opções para Alice e Bob, respectivamente, ou seja, $\mathcal{J}^A$ (resp. $\mathcal{J}^B$) é o conjunto dos jogos que podem ser obtidos após um movimento de Alice (resp. Bob). Todo jogo J será denotado por $J = \{\mathcal{J}^A | \mathcal{J}^B\}$, onde $\mathcal{J}^A$ e $\mathcal{J}^B$ são as opções de Alice e Bob em J . É comum escrever a notação $J = \{J^{A_1}, \dots, J^{A_m} | J^{B_1}, \dots, J^{B_n}\}$, sem chaves adicionais, quando $\mathcal{J}^A = \{J^{A_1}, \dots, J^{A_m}\}$ e $\mathcal{J}^B = \{J^{B_1}, \dots, J^{B_n}\}$. Na literatura, é comum abusar ainda mais da notação e escrever $J = \{J^A | J^B\}$, onde J^A varia nas opções $\mathcal{J}^A$ de Alice e J^B varia nas opções $\mathcal{J}^B$ de Bob.

Os jogos abaixo valem destaque e são denotados por 0 , 1 , -1 , $*$, $\uparrow$ e $\downarrow$:

- $0 = \{|\}$: o jogo vazio: Alice e Bob não tem movimentos e portanto o primeiro jogador perde;
- $1 = \{0|\}$: o jogo 1: Bob não tem movimentos e qualquer movimento de Alice é vencedor, levando a um jogo 0;

³ Como *jogo*, indicamos uma posição de algum jogo combinatório na variante normal.

- $-1 = \{ | 0 \}$: o jogo -1 : Alice não tem movimentos e qualquer movimento de Bob é vencedor, levando a um jogo 0 ;
- $* = \{ 0 | 0 \}$: jogo estrela: primeiro jogador vence, obtendo o jogo 0 e portanto $* || 0$ pela notação anterior;
- $\uparrow = \{ 0 | * \}$ e $\downarrow = \{ * | 0 \}$. Alice (resp. Bob) vence em $\uparrow$ (resp., $\downarrow$), jogando primeiro ou não e, portanto, $\uparrow > 0$ e $\downarrow < 0$.

Também são definidos recursivamente os jogos n e $-n$ para todo $n \geq 2$ e, com isso, todo número inteiro representa um jogo. Resumidamente, Alice tem n movimentos a mais do que Bob no jogo n e Bob tem n movimentos a mais que Alice no jogo $-n$.

- $n = \{ n-1 | \}$: o jogo n : Bob não tem movimentos e qualquer movimento de Alice é vencedor, levando a um jogo $n-1$; por exemplo, $2 = \{ 1 | \} = \{ \{ 0 | \} | \} = \{ \{ \{ \} | \} | \}$;
- $-n = \{ | -(n-1) \}$: o jogo $-n$: Alice não tem movimentos e qualquer movimento de Bob é vencedor, levando a um jogo $-(n-1)$; por exemplo, $-2 = \{ | -1 \} = \{ | \{ 0 \} \} = \{ | \{ \{ \} \} \}$.

Jogos iguais a 0 e Jogos Idênticos: Dados jogos J_1 e J_2 , dizemos que:

- $J_1 \equiv J_2 \Leftrightarrow \mathcal{J}_1^A = \mathcal{J}_2^A$ e $\mathcal{J}_1^B = \mathcal{J}_2^B$ (jogos *idênticos*)
- $J_1 = 0 \Leftrightarrow$ o primeiro a jogar perde em J_1 (jogo *igual ao jogo 0*)

Veremos adiante uma noção importante de igualdade entre dois jogos $J_1 = J_2$, que precisa das noções de soma de jogos e do negativo de um jogo, definidos em breve. Como exemplo, note que o jogo $\{ * | * \} \not\equiv 0 \equiv \{ | \}$, mas o primeiro a jogar perde no jogo $\{ * | * \}$ e portanto $\{ * | * \} = 0$.

Exemplo: NIM-PARTIZAN. Lembrando que os objetos são rotulados com A , B ou C e Alice só pode mover objetos rotulados com A ou C (resp. B ou C), junto com todos acima dele. O jogo $J = (AB, BA)$ tem as opções $\mathcal{J}^A = \{ (\emptyset, BA), (AB, B) \}$ para Alice e $\mathcal{J}^B = \{ (A, BA), (AB, \emptyset) \}$. Ou seja,

$$(AB, BA) = \left\{ (\emptyset, BA), (AB, B) \mid (A, BA), (AB, \emptyset) \right\}.$$

Além disso, temos as seguintes relações dos jogos (Exercício 10.3):

- (A, B) e (C, C) com o jogo vazio 0 (o primeiro a jogar perde),

- (C) e (A, B, C) com o jogo $*$ (o primeiro vence retornando o jogo 0),
- (A) e (AA, B) com o jogo 1, e (B) e (A, BB) com o jogo -1 ,
- (AA) e (AAA, B) com o jogo 2, e (BB) e (A, BBB) com o jogo -2 ,
- (C, CA) com o jogo $\uparrow$, e (C, CB) com o jogo $\downarrow$.

Soma de jogos: Dados dois jogos J_1 e J_2 , ou seja, duas posições de dois jogos combinatórios, que até podem ser jogos combinatórios diferentes, a soma $J_1 + J_2$ é o jogo em que o próximo jogador deve fazer um movimento em apenas um dos jogos J_1 ou J_2 . É fácil ver que a soma de jogos é comutativa e associativa. Definimos ainda $n \cdot J$ como a soma de n cópias disjuntas de J . Note que $J + 0 = J$ (pois não há jogadas no jogo 0) para todo jogo J e a soma $J = J_1 + J_2$ de jogos não-nulos J_1 e J_2 pode ser escrita como $J = \{\mathcal{J}^A | \mathcal{J}^B\}$, onde

$$\mathcal{J}^A = \{J_1^A + J_2, J_1 + J_2^A : J_1^A \in \mathcal{J}_1^A, J_2^A \in \mathcal{J}_2^A\}$$

$$\mathcal{J}^B = \{J_1^B + J_2, J_1 + J_2^B : J_1^B \in \mathcal{J}_1^B, J_2^B \in \mathcal{J}_2^B\}$$

Como exemplo, note que

$$* + * \equiv \{0|0\} + \{0|0\} \equiv \{0 + *, * + 0 | 0 + *, * + 0\} \equiv \{*|*\} = 0,$$

pois o primeiro a jogar perde em $\{*|*\}$.

Lema 10.1. *Um jogo X é igual ao jogo 0 ($X = 0$) se e só se o vencedor de $J + X$ é o mesmo de J para todo jogo J .*

Demonstração. Para provar a ida, suponha que $X = 0$. O jogador com estratégia vencedora em J só jogará em X como resposta a movimentos de seu oponente em X , conseguindo ser o último a jogar em X (pois $X = 0$) e em J (pois tem estratégia vencedora em J) simultaneamente e portanto também em $J + X$. Para provar a volta, tome $J \equiv 0$. Como o vencedor de J é o segundo jogador, então o vencedor de $J + X = X$ é o segundo jogador e portanto $X = 0$. ■

Negativo de um jogo: O *jogo negativo* $-J$ de um jogo $J = \{J^A|J^B\}$ é definido como o jogo em que os papéis de Alice e Bob são trocados: as jogadas possíveis de Alice (resp. Bob) em $-J$ são as jogadas possíveis de Bob (resp. Alice) em J . Portanto, $-J = \{-J^B|-J^A\}$. Define-se a *diferença* $J_1 - J_2$ como o jogo $J_1 + (-J_2)$.

Como exemplo, note que $-* = *$, $-0 = 0$, $-(1) = -1$, $-(-1) = 1$ e que $-(-J) = J$ para todo jogo J . No jogo NIM-PARTIZAN, a instância (BBA) é o negativo de (AAB) , pois trocam-se os papéis de Alice e Bob. Note que a instância (AAB, BBA) tem valor 0 (perde o primeiro jogador). O lema abaixo mostra que isso sempre ocorre.

Lema 10.2. *Seja J um jogo. Então o primeiro jogador perde no jogo $J - J$. Portanto, $J - J = 0$.*

Demonstração. Como os papéis de Alice e Bob estão trocados no jogo $-J$ em comparação ao jogo J , então, para cada movimento do primeiro jogador em um dos jogos J ou $-J$, o segundo jogador terá o mesmo movimento no outro jogo. Seguindo essa estratégia, o segundo jogador é sempre o último a mover, vencendo o jogo. ■

Note que a adição e a subtração de jogos são compatíveis com as operações correspondentes de números. Por exemplo, podemos provar de duas maneiras que o jogo $1 - 1 = \{-1|1\} = 0$. Primeiramente, note que $\{-1|1\} = 0$, pois Alice perde jogando primeiro em -1 e Bob perde jogando primeiro em 1 (ou seja, perde quem joga primeiro). Vamos provar então que $1 - 1 = \{-1|1\}$. Algebricamente, temos $1 - 1 = 1 + (-1) = \{0|\} + \{|\} = \{0 + \{|\} | \{0|\} + 0\} = \{\{|\} | \{0|\}\} = \{-1|1\}$. Alternativamente, analisando as opções de Alice e Bob no jogo $1 - 1 = 1 + (-1)$, temos que só Alice (resp, Bob) pode jogar no jogo 1 (resp. jogo -1), retornando o jogo 0 . Portanto, uma jogada de Alice obtém o jogo $0 + (-1) = -1$ e uma jogada de Bob obtém o jogo $1 + (0) = 1$. Portanto, $1 - 1 = \{-1|1\}$.

Igualdade entre Jogos: Dados jogos J_1 e J_2 , dizemos que:

- $J_1 = J_2 \Leftrightarrow$ o primeiro jogador perde em $J_1 - J_2$ (jogos *iguais*)

Uma intuição mais clara para esta definição é percebida no Teorema 10.3 abaixo, que mostra que $J_1 = J_2$ se e só se o vencedor de $J_1 + X$ é o mesmo de $J_2 + X$ para qualquer jogo X . Ou seja, a associação de qualquer X com J_1 tem o mesmo resultado da associação com J_2 e assim

faz sentido considerá-los como jogos iguais $J_1 = J_2$ (embora possam não ser jogos idênticos $J_1 \neq J_2$).

Claramente $J = J$ e $J \equiv J$ para todo jogo J . Além disso, $J_1 \equiv J_2$ implica $J_1 = J_2$, mas o contrário nem sempre é verdade. Note que, $J - J = 0$ (Lema 10.2), mas $J - J \neq 0$ se $J \neq 0$, pois

$$J - J = J + (-J) = \{J^A - J, J - J^B \mid J^B - J, J - J^A\} \neq 0 \equiv \{\mid\}.$$

Por exemplo, o jogo $1 - 1$ é igual ao jogo 0 (escrevemos $1 - 1 = 0$), mas $1 - 1 \neq 0$, pois $1 - 1 \equiv \{-1 \mid 1\} \neq \{\mid\} \equiv 0$.

Teorema 10.3. *Sejam J_1 e J_2 jogos quaisquer. Portanto, $J_1 = J_2$ se e só se $J_1 + X = J_2 + X$ para todo jogo X . Além disso, $J_1 = J_2$ se e só se o vencedor de $J_1 + X$ é o mesmo de $J_2 + X$ para todo jogo X .*

Demonstração. Para a primeira volta, tomando $X = 0$, temos que $J_1 + X = J_2 + X$ implica diretamente que $J_1 = J_2$. Para a segunda volta, tomando $X = -J_2$, temos que o vencedor de $J_1 + X = J_1 - J_2$ é o mesmo de $J_2 + X = J_2 - J_2 = 0$, ou seja, o segundo jogador, e portanto $J_1 - J_2 = 0$ e consequentemente $J_1 = J_2$.

Para as duas idas, como $J_2 - J_1 = 0$, temos pelo Lema 10.1 que $J_1 + X = J_1 + X + (J_2 - J_1) = J_2 + X$ e que o vencedor de $J_1 + X$ é o mesmo vencedor de $J_1 + X + (J_2 - J_1) = J_2 + X$. ■

Outras relações entre jogos: Note a relação entre as sentenças abaixo e o início desta Seção 10.1. Repetimos aqui a relação $J_1 = J_2$ para mantê-las todas juntas. Dados jogos J_1 e J_2 , dizemos que:

- $J_1 = J_2 \Leftrightarrow J_1 - J_2 = 0 \Leftrightarrow$ o segundo jogador vence em $J_1 - J_2$;
- $J_1 > J_2 \Leftrightarrow J_1 - J_2 > 0 \Leftrightarrow$ Alice sempre vence em $J_1 - J_2$;
- $J_1 < J_2 \Leftrightarrow J_1 - J_2 < 0 \Leftrightarrow$ Bob sempre vence em $J_1 - J_2$;
- $J_1 \parallel J_2 \Leftrightarrow J_1 - J_2 \parallel 0 \Leftrightarrow$ o primeiro jogador vence em $J_1 - J_2$.
- $J_1 \triangleright J_2 \Leftrightarrow J_1 > J_2$ ou $J_1 \parallel J_2$ (ou seja, $J_1 \not\leq J_2$)
- $J_1 \triangleleft J_2 \Leftrightarrow J_1 < J_2$ ou $J_1 \parallel J_2$ (ou seja, $J_1 \not\geq J_2$)

Também escrevemos $J_1 \geq J_2$ (resp. $J_1 \leq J_2$) se $J_1 = J_2$ ou $J_1 > J_2$ (resp. $J_1 < J_2$). Se $J_1 \parallel J_2$, dizemos que J_1 e J_2 *se confundem* ou J_1 é *confuso* com J_2 .

Como exemplo, o jogo $n + 1$ é maior que o jogo n para todo inteiro n , pois o jogo $(n + 1) - n = (n - n) + 1 = 0 + 1 = 1$ é vencedor para Alice.

Teorema 10.4. *Dados jogos J_1, J_2 e J_3 , temos que $J_1 > J_2 > J_3$ implica $J_1 > J_3$ e que $J_1 < J_2 < J_3$ implica $J_1 < J_3$. Consequentemente, se $J_1 > J_2$ e Alice vence em J_2 , então Alice vence em J_1 . Além disso, se $J_1 < J_2$ e Bob vence em J_2 , então Bob vence em J_1 .*

Demonstração. Se $J_1 > J_2 > J_3$, então $J_1 - J_2 > 0$ e $J_2 - J_3 > 0$ e portanto Alice sempre vence em $J_1 - J_2$ e em $J_2 - J_3$. Logo Alice sempre vence o jogo $(J_1 - J_2) + (J_2 - J_3) = J_1 - J_3$, pois consegue jogar respondendo aos movimentos de Bob em $J_1 - J_2$ e em $J_2 - J_3$, garantindo ser a última a jogar em ambos os jogos e vencendo. Logo $J_1 - J_3 > 0$ e consequentemente $J_1 > J_3$. Análogo para $J_1 < J_2 < J_3$. ■

Conjunto dos Jogos

O conjunto $\mathbb{J}$ dos jogos é construído recursivamente como segue. Seja $\mathbb{J}_0 = \{0\}$ o conjunto contendo apenas o jogo vazio 0. Para $n \geq 0$, seja

$$\mathbb{J}_{n+1} = \left\{ \{\mathcal{J}^A | \mathcal{J}^B\} : \mathcal{J}^A, \mathcal{J}^B \subseteq \mathbb{J}_n \right\}.$$

O conjunto $\mathbb{J}$ de jogos é definido como $\mathbb{J} = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{J}_n$. Por exemplo,

$$\mathbb{J}_1 = \left\{ \{|\}, \{0|\}, \{|\}0, \{0|0\} \right\} = \{0, 1, -1, *\},$$

e $\uparrow = \{0|\ast\}$ e $\downarrow = \{\ast|0\}$ pertencem a $\mathbb{J}_2$. Note que $\mathbb{J}_n \subseteq \mathbb{J}_{n+1}$ para todo $n \geq 0$.

O *aniversário* de um jogo J é o menor n tal que existe $J' \in \mathbb{J}_n$ satisfazendo $J' = J$. Dizemos que um jogo J é *mais simples* que um jogo J' se o aniversário de J é menor que o de J' .

A relação de igualdade entre jogos definida anteriormente é uma relação de equivalência (reflexiva, simétrica e transitiva) e portanto particiona o conjunto $\mathbb{J}$ dos jogos em classes de equivalência. Os jogos de uma mesma classe tem o mesmo aniversário e o mesmo valor associado.

Em particular, a noção de aniversário está bem definida para todo jogo.

Teorema 10.5. *Seja $n \geq 0$ um inteiro. Então os jogos n e $-n$ tem aniversário n . Além disso, não há jogo em $\mathbb{J}_n$ maior que n nem menor que $-n$.*

Demonstração. Por indução em n . O caso base $n = 0$ é trivial. Fixe $n \geq 1$ e suponha que vale para todo inteiro menor que n . Vamos provar para n . Como os jogos $n - 1$ e $-(n - 1)$ têm aniversário $n - 1$ por indução, então os jogos n e $-n$ pertencem a $\mathbb{J}_n$ e têm aniversário menor ou igual a n , pois $n = \{n - 1|\}$ e $-n = \{ | - (n - 1)\}$. Além disso, se o aniversário de n é menor que n , então há um jogo $J \in \mathbb{J}_{n-1}$ tal que $J = n$, contradição, pois $J = n > n - 1$ e, por indução, não há jogo maior que $n - 1$ em $\mathbb{J}_{n-1}$. O mesmo para o aniversário de $-n$. Além disso, considere um jogo $J \in \mathbb{J}_n$ qualquer. Vamos mostrar que J não é maior que n . Se $\mathcal{J}^A = \emptyset$, então Alice não tem movimentos em J e perde jogando primeiro, tanto em J como em $J - n$. Se $\mathcal{J}^A \neq \emptyset$, então

$$J - n = \{J^A - n \mid J^B - n, J - (n - 1)\} \leq 0,$$

pois $J^A < n$ por indução já que $J^A \in \mathbb{J}_{n-1}$ e $J^A \not\geq n - 1$. Ou seja, não há jogo maior que n em $\mathbb{J}_n$. Análogo para mostrar que não há jogo em $\mathcal{J}_n$ menor que $-n$. ■

A seguir mostramos como simplificar um jogo o máximo possível.

Jogos em Forma Canônica Um resultado importante dessa teoria é que todo jogo J possui uma simplificação máxima, um único jogo K o mais simples possível tal que $J = K$. Isso é provado nos livros *On numbers and games* (pp. 110-112), *Winning Ways for Your Mathematical Plays* (pp. 62-65) e *Combinatorial Game Theory* (pp. 66-68). Abaixo mostramos as definições de opções dominadas e opções reversíveis, seguidas de exemplos.

Uma opção de Alice (resp. Bob) é *dominada* em um jogo J se existe outra igual ou maior (resp. menor). Uma opção J^{A_1} de Alice é *reversível* em J se existe uma opção de Bob $J^{A_1 B_1} \leq J$ em J^{A_1} . Uma opção J^{B_1} de Bob é *reversível* em J se existe uma opção de Alice $J^{B_1 A_1} \geq J$ em J^{B_1} .

Como intuição para opções dominadas, considere inicialmente que Alice tem duas opções $J^{A_1} > J^{A_2}$ em um jogo J (ou seja, J^{A_2} é dominada). Então, Alice prefere J^{A_1} , ao invés de J^{A_2} , e portanto J^{A_2} poderia ser ignorada. Por exemplo, o jogo $\{2, 3|0, 1\}$ é igual ao jogo $\{3|0\}$.

Como intuição para opções reversíveis, veja a Figura 10.1 com um jogo

$$J = \left\{ \{A | \{B|C\}\} \mid \{ \{X|Y\} | Z \} \right\},$$

onde é dado que $B < C < J < X < Y$. Nesse caso, $J^{A_1} = \{A | \{B|C\}\}$ tem a opção $J^{A_1 B_1} = \{B|C\} < J$ e portanto J^{A_1} é reversível para Alice. Também $J^{B_1} = \{ \{X|Y\} | Z \}$ tem a opção $J^{B_1 A_1} = \{X|Y\} > J$ e portanto J^{B_1} é reversível para Bob. Assim, a opção J^{A_1} de Alice pode ser substituída pela opção $J^{A_1 B_1 A_1} = B$ e a opção J^{B_1} de Bob pode ser substituída pela opção $J^{B_1 A_1 B_1} = Y$. Ou seja, $J = \{B|Y\}$.

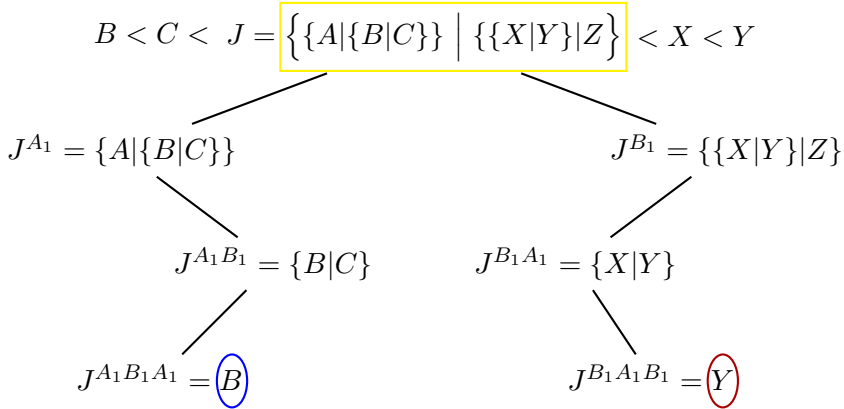


Figura 10.1: Exemplo de um jogo J com opções reversíveis tanto para Alice como Bob. Nesse exemplo, é dado que $B < C < J < X < Y$. O jogo J pode ser simplificado para $J = \{B|Y\}$.

Não é difícil provar que o resultado do jogo não muda se removermos opções dominadas e substituirmos opções reversíveis de um jogador pelas opções desse jogador em sua próxima jogada.

Dizemos recursivamente que um jogo J está em *forma canônica* se:

- $J^{A_1} \parallel J^{A_2}$ e $J^{B_1} \parallel J^{B_2}$ (nenhuma opção é dominada)
- $J^{A_1 B_1} \triangleright J$ e $J^{B_1 A_1} \triangleleft J$ (nenhuma opção é reversível)
- J^{A_1} e J^{B_1} estão em forma canônica (todas as opções canônicas)

para toda opção J^{A_1} e J^{A_2} de Alice em J , toda J^{B_1} e J^{B_2} de Bob em J , toda opção $J^{A_1 B_1}$ de Bob em J^{A_1} e toda opção $J^{B_1 A_1}$ de Alice em J^{B_1} .

Teorema 10.6. *Todo jogo J admite uma única forma canônica, que é o jogo K mais simples tal que $J = K$.*

Demonstração. Exercício 10.6. ■

Como exemplo de redução à forma canônica, considere o jogo $\downarrow + *$. Como $\downarrow = \{*\mid 0\}$ e $* = \{0\mid 0\}$, temos:

$$\downarrow + * = \{*\ + *, \downarrow + 0 \mid 0 + *, \downarrow + 0\} = \{0, \downarrow \mid *, \downarrow\} = \{0 \mid *, \downarrow\},$$

onde a última igualdade vem pela eliminação da opção dominada $\downarrow < 0$ de Alice. Note que $J = \downarrow + * < *$. Portanto, a opção $J^B = \downarrow = \{*\mid 0\}$ de Bob é reversível, pois tem a opção $J^{BA} = * > J$ de Alice. Logo, podemos substituir a opção reversível $J^B = \downarrow$ por $J^{BAB} = *^B = 0$. Portanto a forma canônica de $J = \downarrow + *$ é $\{0\mid 0, *\}$. Olhando esse exemplo do ponto de vista de NIM-PARTIZAN, vimos que a instância (C) tem valor $*$ e a instância (CB, C) tem valor $\downarrow$. Portanto a instância (CB, C, C) tem valor $J = \downarrow + *$. No entanto, como (CB, C, C) pode ser visto como $(CB) + (C, C)$ e o jogo (C, C) tem valor $* + * = 0$, então (CB, C, C) tem o mesmo valor da instância (CB) . Além disso, o jogo (CB) tem valor $\{0\mid 0, *\}$, pois Alice tem apenas uma opção (o jogo 0) e Bob tem duas opções (o jogo 0 e o jogo (C) com valor $*$). Ou seja, $J = \downarrow + * = \{0\mid 0, *\}$, como visto acima.

10.2 Jogos, Números e a Lei da Simplicidade

Vamos definir inicialmente alguns jogos relacionados com números.

Números Inteiros

Já vimos que todo número inteiro representa um jogo. O jogo 0 é $\{\mid\}$ e, para todo inteiro $n \geq 0$, os jogos $n + 1$ e $-(n + 1)$ são $\{n\mid\}$ e $\{\mid -n\}$, respectivamente. Lembre pelo Teorema 10.5 que o aniversário dos jogos n e $-n$ é n para todo $n \geq 0$ (ver Figura 10.2).

Note também que os jogos $n = n \cdot (1)$ e $-n = n \cdot (-1)$, ou seja, n cópias disjuntas dos jogos 1 e -1 , respectivamente, para $n \geq 1$ (Exercício 10.4).

Finalmente, temos que o jogo $(n + 1) + (-1)$ é igual ao jogo n e que qualquer movimento de Alice leva ao jogo $n - 1$ e qualquer movimento de

Bob leva ao jogo $n + 1$. Ou seja, $n = \{n - 1 \mid n + 1\}$ para todo inteiro n . Algebricamente, podemos ver que $(n + 1) + (-1) = n + (1 - 1) = n$ e

$$(n + 1) + (-1) = \{n\} + \{0\} = \{n + (-1) \mid (n + 1) + 0\} = \{n - 1 \mid n + 1\}.$$

Exemplo: NIM-PARTIZAN com instância (AAA,BBB). Se a primeira jogada for de Alice, pode-se obter as instâncias (AA,BBB), (A,BBB) ou $(\emptyset, BBB)$ com valores -1 , -2 e -3 , respectivamente. Se a primeira jogada for de Bob, pode-se obter as instâncias (AAA,BB), (AAA,B) ou $(AAA, \emptyset)$ com valores 1 , 2 e 3 , respectivamente. Isso pode ser representado por $\{-1, -2, -3 \mid 1, 2, 3\}$, que tem o mesmo valor de $\{-1 \mid 1\} = 0$, já que Alice deseja maximizar o valor e Bob minimizar.

Números Diádicos

Seja $\mathbb{D}$ o conjunto dos números diádicos: números racionais cujo denominador da fração irredutível é uma potência de 2. O lema abaixo prova um resultado importante para o jogo $J = \{0 \mid 1\}$, que será usado para mostrar que todo número diádico representa um jogo.

Lema 10.7. *Seja J o jogo $\{0 \mid 1\}$. Logo $2J - 1 = 0$.*

Demonstração. Considere o jogo $2J - 1 = \{0 \mid 1\} + \{0 \mid 1\} + \{0\}$. Se Alice joga primeiro, ela obtém o jogo $J - 1$ jogando em um dos jogos J . Bob então vence jogando no outro jogo $J = \{0 \mid 1\}$, pois obtém o jogo $1 - 1 = 0$, que é perdedor para Alice. Suponha agora que Bob joga primeiro. Se Bob joga em $-1 = \{0\}$, obtendo o jogo $2J$, Alice joga em um dos jogos J , resultando no fim em apenas um jogo J , que é vencedor para Alice. Caso contrário, se Bob joga em um jogo $J = \{0 \mid 1\}$, obtendo o jogo $1 + J - 1 = J$, Alice joga no jogo J , resultando no jogo 0 , que é perdedor para Bob. De qualquer modo, o primeiro a jogar perde e portanto $2J - 1 = 0$. ■

Com esse resultado, definem-se os jogos $\frac{1}{2} = \{0 \mid 1\}$ e $-\frac{1}{2} = \{-1 \mid 0\}$. Recursivamente, para $n \geq 1$, definem-se os jogos

$$\frac{1}{2^{n+1}} = \left\{ 0 \mid \frac{1}{2^n} \right\} \quad e \quad -\frac{1}{2^{n+1}} = \left\{ -\frac{1}{2^n} \mid 0 \right\},$$

de modo que vale $2 \cdot (1/2^{n+1}) - (1/2^n) = 0$ para tais jogos, onde podemos escrever $1/2^n$ para o jogo $\frac{1}{2^n}$. Assim, todo número diádico $k/2^n$ representa um jogo para inteiros k ímpar e $n \geq 1$: o jogo $k \cdot (1/2^n)$ para k positivo ou o jogo $|k| \cdot (-1/2^n)$ para k negativo.

Teorema 10.8. *Dados inteiros k ímpar e $n \geq 1$, temos que o jogo*

$$\frac{k}{2^n} = \left\{ \frac{k-1}{2^n} \mid \frac{k+1}{2^n} \right\}$$

Demonstração. Qualquer movimento de Alice num jogo $1/2^n$ leva a um jogo 0 por definição. Logo qualquer movimento de Alice num jogo $k/2^n$ leva a um jogo $(k-1)/2^n$. Além disso, qualquer movimento de Bob num jogo $1/2^n$ leva a um jogo $1/2^m$ com $0 \leq m < n$. Portanto, Bob prefere o movimento que leva a uma posição $1/2^{n-1}$, com menor valor e portanto menores chances para Alice. Logo, movendo num jogo $k/2^n$, Bob obtém um jogo $(k-1)/2^n + 1/2^{n-1} = (k+1)/2^n$. ■

Com isso, para inteiros k ímpar e $n \geq 1$, vale o seguinte para esses jogos: $(k-1)/2^n$ e $(k+1)/2^n$ são mais simples que o jogo $k/2^n$ e

$$\frac{k-1}{2^n} < \frac{k}{2^n} < \frac{k+1}{2^n}.$$

Exemplo: NIM-PARTIZAN. O Exercício 10.1 pede para provar que as instâncias $(AB \dots B)$ de um pilha com um objeto rotulado A embaixo e n objetos em cima rotulados com B é equivalente ao jogo $1/2^n$.

Jogos que são números

Define-se um jogo combinatório J como um *número*⁴ do seguinte modo recursivo: o jogo vazio 0 é número e, para todo $n \geq 0$, os jogos $n+1 = \{n\}$ e $-(n+1) = \{ \mid -n \}$ são números, além de todo jogo $J = \{J^A \mid J^B\}$ com $J^A < J^B$ em que os jogos J^A e J^B são números e tem aniversário no máximo n .

O Teorema da Simplicidade, visto adiante, mostra que esta definição dos jogos que são números tem a estrutura da árvore binária da Figura 10.2, explicada a seguir. A raiz (nível 0) desta árvore é o jogo número 0. Dado um inteiro positivo n , Conway (1976) prova que todo jogo número com aniversário n está no nível n desta árvore. O filho esquerdo de $-n$ é $-(n+1)$ e o filho direito de n é $n+1$. Exceto esses dois casos, os filhos

⁴ Para representar jogos infinitos que são números, foram criados os *números surreais* em que toda opção de Alice é menor que toda opção de Bob e que fazem parte do grupo de Conway. Para mais informações, recomendamos o livro de Siegel (2013).

esquerdo e direito de um número y do nível n são $\{x|y\}$ e $\{y|z\}$, onde x é o maior número menor que y e z é o menor número maior que y entre os números dos níveis menores que n .

Como exemplo, o jogo número $\frac{3}{4}$ está no nível 3 e tem filho esquerdo $\{\frac{1}{2}|\frac{3}{4}\} = \frac{5}{8}$ e filho direito $\{\frac{3}{4}|1\} = \frac{7}{8}$, pois $\frac{1}{2}$ é o maior número menor que $\frac{3}{4}$ e 1 é o menor número maior que $\frac{3}{4}$ entre os números dos níveis 0, 1 e 2. Além disso, o jogo número $\frac{1}{4}$ está no nível 3 e tem filho esquerdo $\{0|\frac{1}{4}\} = \frac{1}{8}$ e filho direito $\{\frac{1}{4}|\frac{1}{2}\} = \frac{3}{8}$, pois 0 é o maior número menor que $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$ é o menor número maior que $\frac{1}{4}$ entre os números dos níveis 0, 1 e 2.

Como será visto no Teorema da Simplicidade, o jogo número $\{x|z\}$ é igual ao jogo y mais simples (menor aniversário/nível) $x < y < z$. Ou seja, para determinar o valor de $\{x|z\}$, basta encontrar o número y satisfazendo $x < y < z$ com menor nível possível. Por exemplo, observando a Figura 10.2, vemos que $\{\frac{5}{2}|4\} = 3$, $\{\frac{7}{4}|4\} = 2$, $\{\frac{7}{8}|4\} = 1$ e $\{-\frac{1}{8}|4\} = 0$.

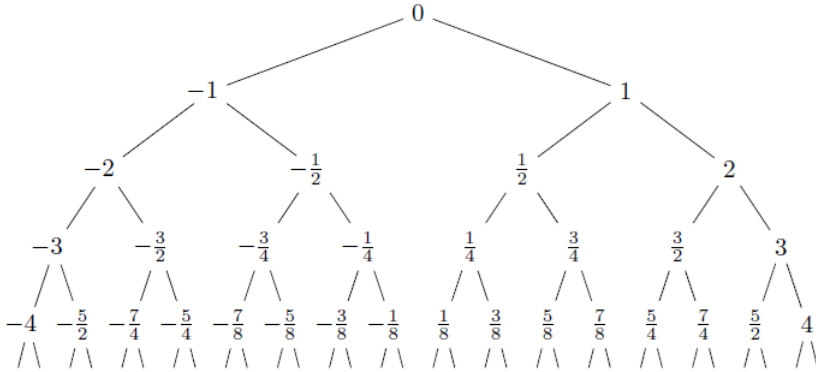


Figura 10.2: Árvore mostrando os jogos que são números. O nível da árvore indica o aniversário do jogo. Por exemplo, o aniversário de n inteiro é $|n|$.

Pelo Teorema 10.8, é possível provar por indução (Exercício 10.7) que todo número diádico $k/2^n$ (k ímpar e $n \geq 1$) pertence a esta árvore. Ou seja, todo número diádico representa um jogo número. No entanto, há jogos que não são números, como $*$ = $\{0|0\}$, $\uparrow$ = $\{0|*\}$ e $\downarrow$ = $\{*|0\}$. Note também que, se $J = \{\mathcal{J}^A|\mathcal{J}^B\}$ onde $\mathcal{J}^A$ e $\mathcal{J}^B$ são conjuntos não vazios de jogos números, então $J = \{J^A|J^B\}$ para $J^A = \max\{\mathcal{J}^A\}$ e $J^B = \min\{\mathcal{J}^B\}$.

Lema 10.9. *Seja J um jogo número. Então $J > J^A$ (se J^A não é vazio) e $J < J^B$ (se J^B não é vazio).*

Demonstração. Prova por indução no aniversário do jogo. Os jogos $0 = \{\emptyset\}$, $1 = \{0|\}$ e $-1 = \{|\emptyset\}$ satisfazem o lema. Seja $J \notin \{0, 1, -1\}$ um jogo número e suponha que o lema vale para todo jogo número mais simples que J . Vamos provar que $J - J^A > 0$: Alice vence em $J - J^A$.

Se Alice joga primeiro em $J + (-J^A)$, ela joga em J , obtendo o jogo $J^A + (-J^A) = 0$, que é perdedor para o próximo jogador (Bob) e portanto Alice vence. Assuma então que Bob é o primeiro a jogar em $J - J^A$.

Se Bob joga em J , ele obtém o jogo $J^B - J^A$ e Alice vence, pois $J^B - J^A > 0$ já que J é um número ($J^B > J^A$). Suponha então que Bob joga em $-J^A = \{-J^{AB} | -J^{AA}\}$, obtendo o jogo $J - J^{AA}$ em seu primeiro movimento. Logo, Alice joga em J , obtendo $J^A - J^{AA}$, e vence por indução, pois J^A é mais simples que J . A prova de que $J^B - J > 0$ é análoga. ■

Lema 10.10. *Se J_1 e J_2 são jogos números, $J_1 + J_2$ também é um número.*

Demonstração. Exercício 10.8. ■

Lei da Simplicidade

Já vimos que todo número diádico representa um jogo. A Lei da Simplicidade abaixo mostra que todo jogo número é um número diádico. Antes precisamos do seguinte lema auxiliar.

Lema 10.11. *Seja I um intervalo de números diádicos, ou seja, a interseção de um intervalo real com $\mathbb{D}$. Então existe um jogo J em I que é mais simples que todos, ou seja, um único jogo J em I com mínimo aniversário.*

Demonstração. Suponha que existem jogos $J_1 > J_2$ com mínimo aniversário em I . Lembre que $J_1 - J_2 = J_1 + (-J_2) = \{J_1^A | J_1^B\} + \{-J_2^B | -J_2^A\}$ e portanto $J_1 - J_2 = \{J_1^A - J_2, J_1 - J_2^B | J_1^B - J_2, J_1 - J_2^A\}$. Como $J_1 > J_2$, Alice vence em $J_1 - J_2$ e portanto $J_1^A - J_2 > 0$ ou $J_1 - J_2^B > 0$. Logo $J_1 > J_1^A > J_2$ ou $J_1 > J_2^B > J_2$ e portanto J_1^A ou J_2^B está em I . Contradição, pois J_1^A e J_2^B tem aniversário menor que J_1 e J_2 . ■

Teorema 10.12 (Lei da Simplicidade). *Todo jogo número $J \neq 0$ é equivalente ao jogo j mais simples no intervalo*

$$I = \left\{ j \in \mathbb{D} : J^A < j < J^B \right\},$$

ou seja, o único número j com menor aniversário em I .

Demonstração. O Lema 10.11 mostra que existe um único jogo j em I com mínimo aniversário. Primeiro vamos provar que $J - j \geq 0$. Isso equivale a Alice vencer se Bob jogar primeiro. Lembre que $J - j = \{J^A - j, J - j^B | J^B - j, J - j^A\}$. Se Bob joga em $J^B - j$, Alice vence pois $j < J^B$. Suponha então que Bob joga em $J - j^A$. Como j^A tem aniversário menor que j , então, pela minimalidade de j , temos que $j^A \notin I$ e portanto $j^A \leq J^A < J$ pois $j^A < j$. Então $J - j^A > 0$ e Alice vence.

Agora vamos provar que $J - j \leq 0$. Isso equivale a provar que Bob vence se Alice joga primeiro. Se Alice joga em $J^A - j$, Bob vence pois $J^A < j$. Suponha então que Alice joga em $J - j^B$. Como j^B tem aniversário menor que j , então, pela minimalidade de j , temos que $j^B \notin I$ e portanto $j^B \geq J^B > J$ pois $j^B > j$. Então $J - j^B < 0$ e Bob vence. ■

Corolário 10.13. *Todo jogo número é um número diádico e todo número diádico é um jogo número.*

Demonstração. Já comentamos antes que o Exercício 10.7 pede para provar a segunda afirmação (todo número diádico é um jogo número). A primeira afirmação vem diretamente da Lei da Simplicidade (Teorema 10.12), pois, de acordo com o enunciado, o jogo mais simples $j \in \mathbb{D}$ é diádico. ■

10.3 Jogos Infinitesimais e Quase Números

Um jogo J é *infinitesimal* se $-x < J < x$ para todo diádico x positivo, ou seja, $-1/2^n < J < 1/2^n$ para todo inteiro $n \geq 0$. Dados jogos J_1 e J_2 , dizemos que J_1 é *quase* J_2 se $J_1 - J_2$ é infinitesimal. Dizemos que um jogo J é um *quase número* se J é quase x para algum número diádico x . Note que 0 é infinitesimal e n é quase n para todo inteiro n .

Vimos antes que alguns jogos não são números, como os jogos $*$ = $\{0|0\}$, $\uparrow$ = $\{0|*\}$ e $\downarrow$ = $\{*\|0\}$. Veremos que esses jogos, bem como os jogos $\uparrow\uparrow = \uparrow + \uparrow$ e $\downarrow\downarrow = \downarrow + \downarrow$, e os numbers $*n$ (definidos em breve) são infinitesimais.

A Figura 10.3 ilustra a relação entre esses jogos, que são provadas nesta seção, onde a nuvem maior representa o jogo estrela $*$ e a nuvem menor os numbers $*n$, que se confundem com 0. A figura indica que

$$-\frac{1}{2^n} < \downarrow\downarrow < \downarrow < *n < \uparrow < \uparrow\uparrow < \frac{1}{2^n}$$

para todo $n \geq 2$ e portanto $*n$, $\uparrow$, $\downarrow$, $\uparrow\uparrow$ e $\downarrow\downarrow$ são infinitesimais. Indica também que $*$ || $\downarrow$, $*$ || $\uparrow$, mas $\downarrow < 0 < \uparrow$ e $\downarrow\downarrow < * < \uparrow\uparrow$.

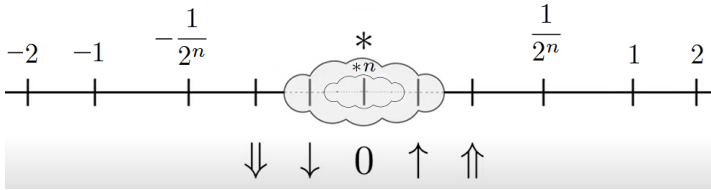


Figura 10.3: Quadro geral de alguns elementos do grupo de Conway. As nuvens maior e menor ao redor do 0 representam os jogos $*$ e $*n$, para qualquer $n \geq 2$ inteiro, que se confundem com o jogo 0.

O jogo estrela $*$ = $\{0|0\}$

Como mencionado antes, o jogo $*$ se confunde com 0 ($*||0$), indicando que o primeiro jogador vence.

Exemplo: KAYLES-PARTIZAN. O grafo completo com pelo menos um vértice rotulado A e outro B tem valor estrela $*$ = $\{0|0\}$, pois o primeiro a jogar vence retornando um jogo vazio 0. Ademais, o grafo completo K_4 com dois vértices rotulados A e dois rotulados B , removendo uma aresta entre um vértice rotulado A e um B , tem valor $\{-1, 0|0, 1\} = \{0|0\} = *$.

Representa-se o jogo $n + *$ como $n*$ para todo número diádico n . Não confundir $n* = n + *$ com o nimber $*n$ definido na próxima subseção.

Nimbers: $*1, *2, *3, \dots$

Esta teoria de Berlekamp, Conway e Guy (1982) para jogos partizan inclui também os jogos imparciais. Para isso, definimos recursivamente os *nimbers* com a notação⁵ $*n$, de modo que $*0 = 0$, $*1 = *$ e, para $n \geq 2$,

$$*n = \left\{ *0, *1, \dots, *(n-1) \mid *0, *1, \dots, *(n-1) \right\}.$$

Por exemplo, $*1 = * = \{0|0\}$, $*2 = \{0, *|0, *\}$ e $*3 = \{0, *, *2 \mid 0, *, *2\}$. O exemplo abaixo mostra uma intuição de porque esses elementos $*n$ são associados aos nimbers do Capítulo 2. Note que o jogo NIM-PARTIZAN onde todos os objetos são coloridos com C é exatamente igual ao jogo imparcial NIM, que é fundamental para a Teoria de Sprague-Grundy.

⁵ Não confundir o nimber $*n$ com $n* = n + *$.

Exemplo: NIM-PARTIZAN. A instância $(C \dots C)$ com $n \geq 1$ elementos é representada pelo nimber $*n$. Por exemplo, a instância (C, CC, CCC) é representada pelo valor $*1 + *2 + *3 = *(1 \oplus 2 \oplus 3) = 0$ e portanto o primeiro a jogar perde, como visto no Capítulo 2 para o jogo NIM.

A Teoria de Sprague-Grundy vista no Capítulo 2 mostra que a soma de nimbers é a operação *bitwise-xor* $\oplus$ (ou-exclusivo bit a bit). Ou seja:

Lema 10.14. *Sejam inteiros $m, n \geq 0$. Então $*m + *n = *(m \oplus n)$. Ademais, $-*n = *n$ e $*m \parallel *n$ se $m \neq n$.*

Demonstração. A primeira sentença vem diretamente da Teoria de Sprague-Grundy. Como $*n + *n = *(n \oplus n) = 0$, então $-*n = *n$. Ademais, $*m - *n = *m + *n = *(m \oplus n) \parallel 0$ para $m \neq n$ e portanto, no jogo $*m - *n$, o primeiro a jogar vence, implicando que $*m \parallel *n$. ■

Os jogos infinitesimais $\uparrow = \{0|*\}$ e $\downarrow = \{*\mid 0\}$

Os jogos $\uparrow$ e $\downarrow$ estão entre os mais usados na Teoria Combinatória dos Jogos. Eles são tão usados que alguns autores preferem, por exemplo, expressões como $\uparrow*$ e $\downarrow*$, ao invés das formas canônicas $\{*, 0|0\}$ e $\{0|0, *\}$.

Lema 10.15. *Sobre os jogos $\downarrow$ e $\uparrow$, valem as seguintes propriedades:*

- (a) $\downarrow = -\uparrow$ e $\uparrow = -\downarrow$
- (b) $\downarrow < 0 < \uparrow$
- (c) $\uparrow \parallel *$ e $\downarrow \parallel *$
- (d) $\uparrow > *n$ e $\downarrow < *n$ para todo $n \geq 2$

Demonstração. Para provar (a), note que $-\uparrow = \{-* \mid -0\} = \{*\mid 0\} = \downarrow$, pois $-* = *$ e $-0 = 0$. Análogo para $-\downarrow$. Para provar (b), considere o jogo $\uparrow = \{0|*\}$. Se Alice joga primeiro, ela vence retornando um jogo 0. Se Bob joga primeiro, ele retorna um jogo $*$ e portanto Alice vence em seguida. Como Alice sempre vence, $\uparrow > 0$. Análogo para $\downarrow < 0$. Para provar (c), considere o jogo $\uparrow - * = \uparrow + * = \{0|*\} + \{0|0\}$. Se Alice joga primeiro, ela retorna $\uparrow + 0 > 0$ e vence. Se Bob joga primeiro, ele retorna $* + * = 0$ e vence, pois Alice é a próxima a jogar no jogo 0. Portanto, o primeiro a jogar sempre vence em $\uparrow - * \parallel 0$ e então $\uparrow \parallel *$. Análogo para $\downarrow \parallel *$. Para provar (d), considere o jogo $\uparrow - *n = \uparrow + *n$ com $n \geq 2$. Se Alice joga primeiro, ela retorna $\uparrow + 0 > 0$ e vence. Suponha então que Bob joga

primeiro. Se Bob obtém $* + *n > 0$ ou $\uparrow + 0 > 0$, Alice vence. Se Bob obtém $\uparrow + *m$ para $0 < m < n$, Alice retorna $\uparrow + 0 > 0$ e vence. Portanto, Alice sempre vence e $\uparrow > *n$. Análogo para $\downarrow < *n$. ■

Mais jogos infinitesimais: $\uparrow$ e $\downarrow$

Vimos que $\uparrow = \uparrow + \uparrow$ e $\downarrow = \downarrow + \downarrow$.

Lema 10.16. *Sobre os jogos $\downarrow$ e $\uparrow$, valem as seguintes propriedades:*

- (a) $\downarrow = -\uparrow$ e $\uparrow = -\downarrow$
- (b) $\uparrow > \uparrow > 0$ e $\downarrow < \downarrow < 0$
- (c) $\downarrow < * < \uparrow$
- (d) $\uparrow < 1/2^n$ e $\downarrow > -1/2^n$ para todo $n \geq 0$

Demonstração. Para provar (a), note que $-\uparrow = -\uparrow - \uparrow = \downarrow + \downarrow = \downarrow$. Análogo para $-\downarrow$. Para provar (b), note que $\uparrow - \uparrow = \uparrow > 0$. Portanto, $\uparrow > \uparrow$. Análogo para $\downarrow < \downarrow$. Para provar (c), considere o jogo $\uparrow - * = \uparrow + * = \{0|*\} + \{0|*\} + \{0|0\}$. Portanto, temos $\{0 + \uparrow + *, \uparrow + \uparrow + 0\} * + \uparrow + *, \uparrow + \uparrow + 0\} = \{\uparrow + *, \uparrow | \uparrow\}$, onde a última igualdade vem de $* + * = 0$ e $\uparrow < \uparrow$. Logo, se Alice é a primeira a jogar, ela retorna $\uparrow > 0$ e vence. Se Bob é o primeiro a jogar, ele retorna $\uparrow > 0$ e Alice também vence. Portanto $\uparrow > *$. Análogo para $\downarrow < *$.

Para provar (d), considere o jogo $1/2^n - \uparrow$ para n grande, ou seja, $1/2^n + \downarrow + \downarrow$. Vamos provar que Alice vence. Lembre que $1/2^n = \{0|1/2^{n-1}\}$ e $\downarrow = \{*\|0\}$. Suponha que Alice é a primeira a jogar, obtendo $1/2^n + \downarrow + *$. Se Bob obtém $1/2^n + \downarrow + 0$, Alice vence obtendo $1/2^n + * > 0$. Se Bob obtém $1/2^n + 0 + * > 0$, Alice vence. Se Bob obtém $1/2^{n-1} + \downarrow + *$, Alice obtém $1/2^{n-1} + * + * = 1/2^{n-1} > 0$. Suponha agora que Bob é o primeiro a jogar em $1/2^n + \downarrow + \downarrow$. Se Bob obtém $1/2^n + \downarrow + 0$, Alice obtém $1/2^n + * > 0$ e vence. Se Bob obtém $1/2^{n-1} + \downarrow + \downarrow$, estamos no caso do parágrafo anterior em que Alice vence quando joga primeiro, substituindo n por $n - 1$. Portanto, $1/2^n > \uparrow$. Análogo para $-1/2^n < \downarrow$. ■

10.4 Evite Jogos que são Números !

Veremos nessa seção que não vale a pena jogar em um número, a menos que não haja mais nada a fazer. Intuitivamente, como todo número $J =$

$\{J^A | J^B\}$ com números $J^A < J < J^B$ pelo Teorema 10.12, então jogar em J piora o valor da posição obtida, seja para Alice ou Bob.

Veremos duas versões (fraca e forte) do Teorema sobre Evitar Números (*Number Avoidance Theorem*).

Teorema Fraco sobre Evitar Números

Teorema 10.17. *Seja x um número diádico e J um jogo que não é número. Se Alice vence em $J + x$, então também vence em $J^A + x$ para $J^A \in \mathcal{J}^A$. Se Bob vence em $J + x$, então também vence em $J^B + x$ para $J^B \in \mathcal{J}^B$.*

Demonstração. Suponha que Alice vence $J + x$, obtendo $J + x^A \geq 0$. Como J não é número, então $J \neq -x^A$ e $J + x^A > 0$. Logo Alice também vence $J + x^A$. Por indução, Alice vence $J^A + x^A \geq 0$. Logo, $J^A + x > J^A + x^A \geq 0$ e portanto $J^A + x > 0$. Análogo para Bob. ■

Como exemplo, Alice vence o jogo $1 + *$ jogando em $*$, mas perderia se jogasse em 1. O mesmo para os jogos $\frac{1}{2^n} + *$ e $\frac{1}{2^n} + \Downarrow$ para todo inteiro $n \geq 0$.

Até o final desta seção, vamos nos concentrar na prova do Teorema Forte sobre Evitar Números (Teorema 10.22). Para isso, será necessária a definição dos dois *números de parada* $n_A(J)$ e $n_B(J)$ de um jogo J (que também serão úteis na seção seguinte), bem como resultados auxiliares sobre números de parada (Lema 10.18) e a relação de quase-números com números de parada (Lema 10.19), bem como o Teorema 10.21 da Translação.

Números de Parada de um Jogo

A seguir, definimos os números de parada $n_A(J)$ de Alice e $n_B(J)$ de Bob para um jogo J . Considere que Alice e Bob começam um jogo J e desejam **parar** quando a posição obtida for um número. Seja $n_A(J)$ (resp. $n_B(J)$) o número de parada quando Alice (resp. Bob) começa o jogo.

Formalmente, definimos os *números de parada* de Alice e Bob, $n_A(J)$ e $n_B(J)$, de modo recursivo. Se o jogo J é um número, $n_A(J) = n_B(J) = J$. Caso contrário, $n_A(J) = \max\{n_B(J^A)\}$ e $n_B(J) = \min\{n_A(J^B)\}$, onde relembramos que $J^A \in \mathcal{J}^A$ e $J^B \in \mathcal{J}^B$. Como exemplo, note que $n_A(J) = 4$ e $n_B(J) = 1$ para os jogos $\{\{5|4\} \mid \{1|0\}\}$ e $\{\{5|\{4|3\}\} \mid \{\{2|1\}|0\}\}$. O Lema 10.19 prova que $n_A(J) = n_B(J) = 0$ para todo jogo infinitesimal J .

Lema 10.18. *Sejam J e K dois jogos e x um número diádico.*

- (a) $n_A(-J) = -n_B(J)$ e $n_B(-J) = -n_A(J)$ e $n_A(J) \geq n_B(J)$
- (b) Se $n_A(J) < x$, então $J < x$. Se $n_B(J) > x$, então $J > x$.
- (c) Se $n_A(J) > x$, então $J \triangleright x$. Se $n_B(J) < x$, então $J \triangleleft x$.
- (d) Se $J \leq x$, então $n_A(J) \leq x$. Se $J \geq x$, então $n_B(J) \geq x$.
- (e) $n_B(J^A) \leq n_A(J)$ e $n_A(J^B) \geq n_B(J)$ para todo J^A e J^B .
- (f) $n_A(J+x) = n_A(J) + x$ e $n_B(J+x) = n_B(J) + x$ para todo $x \in \mathbb{D}$.
- (g)
$$\begin{aligned} n_A(J) + n_A(K) &\geq n_A(J+K) \geq n_A(J) + n_B(K) \geq \\ &\geq n_B(J+K) \geq n_B(J) + n_B(K) \end{aligned}$$
- (h) Se $J \geq K$, então $n_A(J) \geq n_A(K)$ e $n_B(J) \geq n_B(K)$

Demonstração. Exercício 10.8. ■

Infinitesimal equivale a número de parada zero

O lema abaixo afirma que jogo infinitesimal equivale a números de parada zero e quase-número equivale a números de parada iguais.

Lema 10.19. *Um jogo J é infinitesimal se e só se $n_A(J) = n_B(J) = 0$. Portanto, um jogo J é quase um número x se e só se $n_A(J) = n_B(J) = x$.*

Demonstração. Se $n_A(J) = n_B(J) = 0$, então, pelo Lema 10.18(b), $-x \leq J \leq x$ para todo número $x > 0$ e portanto J é infinitesimal.

Suponha então que $n_A(J) \neq 0$ ou $n_B(J) \neq 0$. Sem perda de generalidade, assumamos que $n_A(J) > x > 0$ para algum número x . Logo, pelo Lema 10.18(c), $J \triangleright x$ e consequentemente J não é infinitesimal. ■

Teorema da Translação

Lema 10.20. *Se J é um jogo que não é um número, então existe uma opção J^A de Alice e uma opção J^B de Bob tal que $J^A - J > -2x$ e $J^B - J < 2x$ para todo número diádico $x > 0$.*

Demonstração. Como J não é número, por definição existe J^A tal que $n_B(J^A) = n_A(J)$. Logo, pelo lema anterior, $J^A + x > n_B(J^A) = n_A(J) > J - x$ e portanto $J^A - J > -2x$. Análogo para J^B . ■

Teorema 10.21 (Translação). *Seja x um número diádico e J um jogo que não é número. Então $J + x = \{J^A + x \mid J^B + x\}$.*

Demonstração. Seja $J + x^A$ uma opção de Alice. Como $x^A - x < 0$, temos pelo lema anterior que $J^A - J > x^A - x$ e portanto $J + x^A < J^A + x$. Análogo para $J + x^B > J^B + x$. Portanto, como a opção $J + x^A$ de Alice e $J + x^B$ de Bob estão dominadas, então $J + x = \{J^A + x \mid J^B + x\}$. ■

Pelo Teorema 10.21 da Translação, $x + * = \{x \mid x\}$ para todo número x , pois $* = \{0 \mid 0\}$ não é número.

Teorema Forte sobre Evitar Números

Teorema 10.22. *Seja x um número diádico, J um jogo não-número e K um jogo qualquer. Se Alice vence em $J + K + x$, então vence em $(J + K)^A + x$. Se Bob vence em $J + K + x$, então vence em $(J + K)^B + x$. Isso vale mesmo se $J + K$ é um número.*

Demonstração. Se $J + K$ é um número, a prova é direta. Caso contrário, a prova sai pelo Teorema 10.21 da Translação, considerando o jogo $J + K$ ao invés de J apenas. ■

Como exemplo, Alice vence o jogo $\frac{1}{2^n} + * + K$ para todo $K \geq -\frac{1}{2^{n+1}}$, jogando em $K + *$, mesmo se $K = 0$ ou $K = *$. No caso de NIM-PARTIZAN, Alice vence a instância (BA, C, A) , evitando o número (BA) e jogando em (C, A) , mais especificamente em (C) , pois ela perderia se jogasse em (A) . Alice também vence as instâncias (ABB, CB, C) e (ABB, CB, CA) , evitando o número (ABB) , mesmo (CB, CA) sendo um número.

10.5 Jogos Quentes e a Teoria da Temperatura

Dizemos que um jogo J é:

- *frio* se J é um número;
- *morno* se J é quase um número, mas não é número;
- *quente*, caso contrário, ou seja, se $n_A(J) > n_B(J)$.

O fato de um jogo ser quente se e só se $n_A(J) > n_B(J)$ vem diretamente do Lema 10.18(a) e do Lema 10.19.

Números são chamados de frios, pois ninguém quer jogar neles pelo Teorema 10.17 sobre Evitar Números. Quase números são mornos pois são do tipo $J = x + \varepsilon$ para algum número x e um infinitesimal ε , e portanto, pelo Teorema 10.17 sobre Evitar Números, os jogadores jogarão nos infinitesimais, evitando o número, o máximo que puderem.

Jogos do tipo $J = \{J^A | J^B\}$ para números $J^A > J^B$ são jogos quentes, pois $n_A(J) > n_B(J)$ já que $n_A(J) = J^A$ e $n_B(J) = J^B$. Por exemplo, $\{0|1\}$ é o jogo número $\frac{1}{2}$, mas $\{1|0\}$ é um jogo quente. Entre os jogos quentes, alguns são mais quentes que outros. Por exemplo, Alice sempre vence no jogo $\{2|0\} + \{0|-1\}$, que é a soma de dois jogos quentes, mas ambos os jogadores preferem jogar em $\{2|0\}$, ao invés de $\{0|-1\}$, pois veremos que o primeiro é mais quente que o segundo.

Essa medida do quão quente é um jogo é chamada de *temperatura* do jogo, a qual junto com o termografo de um jogo, é importante para decidir o vencedor na soma de vários jogos quentes. Dado um jogo J , definimos a *temperatura* $t(J)$ como

$$t(J) = \min \left\{ t \geq 0 : J'_t \text{ é quase um número} \right\}, \text{ onde } J'_t = \{J^A - t | J^B + t\}.$$

Como mostrado em Siegel (2013), a temperatura $t(J)$ é um parâmetro bem definido para todo jogo J . Vamos omitir alguns detalhes técnicos na intenção de apresentar os elementos essenciais desta teoria.

Definimos a *média* $m(J)$ como o número x tal que $J'_{t(J)}$ é quase x . Definimos o *jogo esfriado* J_t como $J_t = J'_t$, se $t < t(J)$, e $J_t = m(J)$, caso contrário. Note que J é quase um número x se e só se $t(J) = 0$ e $m(J) = x$.

Exemplo: jogo chave $\pm x$. Definimos o jogo $y \pm x$, onde assumimos que $x > 0$ e y são números, como o jogo quente $y \pm x = \{y + x | y - x\}$. Note que $t(y \pm x) = x$ e $m(y \pm x) = y$. Por exemplo, $t(\pm x) = x$ e $m(\pm x) = 0$. Note que, se $J = y \pm x = \{y + x | y - x\}$, então $n_A(J_t) = y + x - t$ e $n_B(J_t) = y - x + t$, se $t < x$, e $n_A(J_t) = n_B(J_t) = y$ se $t \geq x$.

Gráfico da Temperatura de um Jogo: Termografo

Definimos o *termografo*⁶ de um jogo J como o par de funções $n_A(J_t)$ e $n_B(J_t)$ em função de $t \geq 0$. Ver Figura 10.4(a) para um exemplo.

O livro *Winning Ways* criou a tradição de representar o termografo com o gráfico do par de funções rotacionado em 90° graus à esquerda (Figura 10.4(b)). A motivação é que os valores do jogo ficam na horizontal, ao invés da vertical, ficando mais fácil comparar os valores com 0. Além disso, os valores no eixo x em ordem decrescente é para manter os valores de Alice na esquerda e os de Bob na direita, como na notação $\{J^A|J^B\}$.

Analisando a Figura 10.4(b), vemos que a base do termografo do jogo $\{1 \pm 2\}$ contém o valor do jogo 0, indicando que o primeiro a jogar vence.



(a) Jogo $J = (1 \pm 2)$ tem $t(J) = 2$ e $m(J) = 1$

(b) Termografo do jogo (1 ± 2) como em *Winning Ways*

Figura 10.4: Duas representações de um termografo. Em (a), como par das funções $n_A(J_t)$ em azul e $n_B(J_t)$ em vermelho, com parâmetro t . Em (b), representação tradicional de um termografo, segundo o *Winning Ways*: rotação de 90° à esquerda na Figura (a).

É possível obter o termografo de um jogo quente a partir dos termografos de suas opções. A obtenção do termografo de um jogo e sua análise, principalmente no caso de soma de vários jogos, ajudam a decidir qual jogador tem estratégia vencedora. Essa Teoria da Temperatura de jogos quentes é muito vasta e não será mostrada em detalhes aqui.

⁶ Não confundir termografo com termógrafo, assim como não se deve confundir digrafo com dígrafo.

10.6 Aplicação em grafos: jogo KAYLES-PARTIZAN

Nesta seção, mostramos alguns exemplos do jogo KAYLES-PARTIZAN e tentamos aplicar a maior parte dos resultados vistos nas seções anteriores.

Relembre que nesse jogo, Alice e Bob selecionam vértices de um grafo G de modo que o conjunto de vértices selecionados seja sempre um conjunto independente. Na variante normal, o último a jogar vence. Em KAYLES-PARTIZAN, os vértices estão coloridos com A ou B e Alice (resp. Bob) pode selecionar apenas vértices coloridos com A (resp. B).

Como primeiro exemplo, considere o grafo bipartido completo $K_{n+1,n+1}$ com partes V_A e V_B tal que todo vértice em V_A (resp. V_B) está colorido com A (resp. B). Se Alice joga primeiro, ela seleciona um vértice A , proibindo todos os vértices B e permitindo todos os demais n vértices A . Se Bob joga primeiro, ele seleciona um vértice B , proibindo todos os vértices A e permitindo todos os demais n vértices B . Resumindo, o jogo nesse grafo tem valor $\pm n = \{n\} - \{n\}$, pois temos o jogo n se Alice joga primeiro e temos o jogo $-n$ se Bob joga primeiro. Note que o termografo contém 0 na base e portanto o primeiro a jogar vence.

No restante desta seção, vamos considerar caminhos P_n . Representamos uma instância P_n de KAYLES-PARTIZAN por sua sequência de cores. Por exemplo, consideramos os jogos AAB e BAA idênticos, indicando o caminho P_3 com os dois primeiros vértices coloridos A e o último colorido B . Note ainda que o jogo negativo $-AAB=BBA=ABB$ (troca as cores A e B).

O grafo vazio tem valor 0. A seguir, analisamos caminhos P_n . Note abaixo que KAYLES-PARTIZAN contém jogos frios (números) como $AAB=\{0|1\}$, jogos mornos como $AB=*=\{0|0\}$ e jogos quentes como $ABA=\{1|0\}$.

- P_1 : $A=1$ e $B=-1$.
- P_2 : $AA=1$, $BB=-1$, $AB=BA=*$.
- P_3 : $AAA=2$, $BBB=-2$, $AAB=\{0|1\}=\frac{1}{2}$ e $ABA=\{1|0\}$.
- P_4 : $AAAA=2$, $AAAB=AABA=\{1|1\}=1^*$, $AABB=ABBA=0$, $ABAB=\{1|-1\}$.

Note que omitimos alguns jogos P_4 , pois podem ser obtidos dos listados acima. Por exemplo, $ABAA=AABA=1^*$ e $BABB=-ABAA=-1^*$.

- P_5 : $AAAAA=3$, $AAAAB=AABAA=\frac{3}{2}$, $AAABA=\{2|1\}$, $AAABB=\frac{1}{2}$,
 $AABAB=\{1|0\}$, $AABBA=\frac{3}{4}$, $ABAAB=\{\frac{1}{2}|*\}$, $ABABA=\{2|*\}$, $ABBBA=0$
- P_6 : $AAAAAA=3$, $AAAAAB=AAAABA=AAABAA=2*$,
 $AAAABB=AAABBA=AABAAB=AABBAA=1$, $AAABAB=\{2|0\}$,
 $AAABBB=AABABB=ABBAAB=*$, $AABABA=\{2|\frac{1}{2}\}$, $AABBAB=\{\frac{1}{2}|0\}$,
 $AABBB=\frac{1}{4}$, $ABAAAB=\{1*|\frac{1}{2}\}$, $ABAABA=1$, $ABABAB=\{1*|\{0|-1\}\}$,
 $ABABBA=\{1*|-1/2\}$, $ABBBBA=\{\{2|1\}|-1/2\}$.

Com esses valores iniciais até P_6 , vamos determinar o valor do caminho P_7 com cores AABAABA. Alice pode jogar nas letras 1, 2, 4, 5 e 7, obtendo valores $BAABA=\{\frac{1}{2}|*\}$, $AABA=1*$, $AA+BA=1*$, $AAB+A=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$ e $AABAA=\frac{3}{2}$. Bob pode jogar nas letras 3 e 6, obtendo valores $A+ABA=1+\{1|0\}=\{2|1\}$ e $AABA=1*$. Resumindo,

$$AABAABA = \left\{ \left\{ \frac{1}{2}|* \right\}, 1*, \frac{3}{2} \mid \{2|1\}, 1* \right\} = \left\{ \frac{3}{2} \mid 1* \right\}$$

Vamos determinar agora o valor de P_9 com cores ABAABAABA. Alice pode jogar nas letras 1, 3, 4, 6, 7 e 9, obtendo valores $AABAABA=\{\frac{3}{2}|1*\}$, $A+BAABA=1+\{\frac{1}{2}|*\}=\{\frac{3}{2}|1*\}$ e $AB+AABA=1+1=2$, pois as jogadas nas letras 9, 7 e 6 são equivalentes a das letras 1, 3 e 4. Bob pode jogar nas letras 2, 5 e 8, obtendo valores $ABAABA=1$ e $ABA+ABA=2\cdot\{1|0\}=1$, pois a jogada na letra 8 é equivalente a da letra 2. Resumindo,

$$ABAABAABA = \left\{ \left\{ \frac{3}{2}|1* \right\}, 1 \mid 1 \right\} = \{1|1\} = 1*$$

Finalmente considere a variante de KAYLES-PARTIZAN em que os vértices também podem estar coloridos com a cor C , indicando que qualquer jogador pode selecionar tais vértices. Com os exemplos anteriores, temos que o primeiro a jogar vence no caminho P_{16} com cores

$$ABAABAABAACABBBA,$$

simplesmente selecionando o único vértice colorido com C . Isso porque a primeira jogada no vértice colorido com C gera um jogo com valor

$$ABAABAABA + BBBA = 1* - 1* = 0$$

e portanto o próximo jogador perde. Essa instância em especial tem 9 vértices coloridos com A e apenas 6 coloridos com B e, mesmo assim, Bob consegue vencer jogando primeiro.

10.7 Aplicação em grafos: jogo CIG_g PARTIZAN

S. N. Araújo et al. (2025) investigaram a versão partizan do jogo imparcial CIG_g de convexidade em grafos, visto na Seção 6.2, que é praticamente igual à variante imparcial, exceto pelo fato de que, no jogo partizan, os vértices do grafo já vem rotulados com A, B ou C, e Alice (resp. Bob) só pode selecionar vértices rotulados com A ou C (resp. B ou C). Como exemplo, considere o jogo CIG_g PARTIZAN sobre o grafo da Figura 10.5.

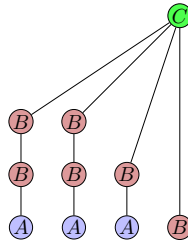


Figura 10.5: Instância de CIG_g PARTIZAN em que o primeiro jogador (seja Alice ou Bob) vence selecionando o vértice rotulado com C .

Note que o primeiro a jogar vence selecionando o vértice rotulado com C , pois o grafo resultante desse primeiro movimento tem valor 0 pela Teoria Combinatória dos Jogos, vista neste capítulo. Para isso, note que a posição obtida desse primeiro movimento é equivalente à posição de NIM-PARTIZAN (ABB, ABB, AB, B) , com valor $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = 0$.

Combinando a Teoria Combinatória dos Jogos com argumentos similares na prova do Teorema 6.1, S. N. Araújo et al. (2025) provaram o seguinte:

Teorema 10.23 (S. N. Araújo et al. 2025). *O problema de decisão do jogo CIG_g PARTIZAN na variante normal pode ser resolvido em tempo polinomial em árvores.*

10.8 Exercícios

Exercício 10.1. Prove que o primeiro a jogar sempre perde nas instâncias (B, AB, AB) e (BA, ABB, ABB) de NIM-PARTIZAN.

Exercício 10.2. Mostre que a instância $(AB \dots B)$ de NIM-PARTIZAN tem valor $1/2^n$, onde n é o número de B's.

Exercício 10.3. Prove que as instâncias (AA, B) , (A, B, C) e (C, CA) têm valores 1, $*$ e $\uparrow$, respectively.

Exercício 10.4. Prove que o jogo $n = n \cdot (1)$ e que o jogo $-n = n \cdot (-1)$ para todo inteiro positivo n . Ou seja, prove que o jogo n é a união disjunta de n jogos 1 e o jogo $-n$ é a união disjunta de n jogos -1 .

Exercício 10.5. Prove as seguintes formas canônicas:

$$(a) \downarrow + * = \{0|0, *\}$$

$$(b) \{\{-6|\{\{-4|\{\{-2|\{\{0|0\}|1\}\}|3\}\}|5\}\}|7\} = 0$$

Exercício 10.6. Prove o Teorema 10.6.

Exercício 10.7. Prove que todo número diádico pertence à árvore da Figura 10.2. Dica: Indução e o Teorema 10.8.

Exercício 10.8. Prove os Lemas 10.18 e 10.10.

Apêndices



Teoria dos Grafos

Um grafo $G = (V, E)$ consiste de um conjunto V de *vértices* e um conjunto E de *arestas*, que são pares não ordenados de vértices distintos. Se xy é uma aresta, dizemos que os vértices x e y são *adjacentes* (ou *vizinhos*) e são as *extremidades* da aresta xy . Usa-se a notação $V(G) = V$, $E(G) = E$, $n = |V(G)|$ e $m = |E(G)|$. A *ordem* de G é n .

A *vizinhança* $N(v)$ de um vértice v em um grafo é o conjunto de seus vértices vizinhos. O grau $d(v)$ é igual a $|N(v)|$. A *vizinhança fechada* é denotada por $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Um grafo é k -*regular* se todos os vértices têm grau igual a k . O *grau mínimo* $\delta(G)$ e o *grau máximo* $\Delta(G)$ são definidos como $\delta(G) = \min_{v \in V(G)} d(v)$ e $\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} d(v)$. Um vértice é *isolado* se tem grau 0 (sem vizinhos). Um vértice é *universal* se tem grau $n - 1$ (é vizinho de todos os demais vértices). É bem conhecido o fato de que, em qualquer grafo G , $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$.

Dizemos que um grafo H é *subgrafo* de G se H pode ser obtido de G pela remoção de vértices e arestas e que é um subgrafo *gerador* se $V(H) = V(G)$. Um subgrafo é *induzido* se é obtido somente pela remoção de vértices. Dado $X \subseteq V(G)$, seja $H = G[X]$ o subgrafo de G induzido por X , ou seja, $V(H) = X$.

A *união* $G \cup H$ de dois grafos G e H é o grafo com $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ e $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$. A *interseção* $G \cap H$ de dois grafos G e H é o grafo com $V(G \cap H) = V(G) \cap V(H)$ e $E(G \cap H) = E(G) \cap E(H)$. Dois grafos G e H são *disjuntos em vértices* se $V(G) \cap V(H) = \emptyset$. Dois grafos G e H são *disjuntos em arestas* se $E(G) \cap E(H) = \emptyset$.

O *complemento* $\overline{G}$ de um grafo G é o grafo tal que $V(\overline{G}) = V(G)$ e $E(\overline{G}) = \{xy \mid xy \notin E(G)\}$. Um grafo G é *completo* se quaisquer dois vértices distintos são vizinhos. Seja K_n o grafo completo com n vértices. Uma *clique* em G é um subconjunto $K \subseteq V(G)$ tal que $G[K]$ é completo. Um *conjunto independente* em G é um subconjunto $S \subseteq V(G)$ tal que $G[S]$

é um grafo sem arestas (quaisquer dois vértices são não adjacentes). Sejam $\alpha(G)$ e $\omega(G)$ os tamanhos do maior conjunto independente e da maior clique de G , respectivamente.

Um *caminho* em um grafo é uma sequência de vértices $v_1 \dots v_k$ tal que $v_i v_{i+1} \in E(G)$ para $1 \leq i < k$, sem repetição de vértices. Um *ciclo* é uma sequência de vértices $v_1 \dots v_k$ tal que $v_i v_{i+1} \in E(G)$ para $1 \leq i < k$, sem repetição de vértices, exceto que $v_1 = v_k$. Seja P_n (resp. C_n) o grafo formado exatamente por um caminho (resp. ciclo) com n vértices. A *distância* $dist(x, y)$ entre vértices x e y é o tamanho do menor caminho de x a y , onde $dist(v, v) = 0$. A *excentricidade* de um vértice v é definida como: $exc(v) = \max\{dist(v, x) \mid x \in V(G)\}$. O *diâmetro* de um grafo G é definido como: $diam(G) = \max\{exc(v) \mid v \in V(G)\}$. O *centro* de um grafo G é o conjunto de vértices de G com excentricidade mínima. A *cintura* (*girth*) de um grafo G é o tamanho do menor ciclo induzido de G .

Dois grafos G e H são *isomorfos* (denota-se $G \cong H$) se existe uma bijeção $f : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que $xy \in E(G)$ se e só se $f(x)f(y) \in E(H)$. Dados grafos G e H , dizemos que G *contém* H se existe um subgrafo G' de G isomorfo a H . Dizemos que G é *livre de* H se G não contém H como subgrafo induzido.

Um grafo G é *conexo* se há um caminho entre qualquer par de vértices de G . Caso contrário, G é *desconexo*. Uma *componente conexa* de um grafo G é um subgrafo conexo maximal de G . Dado $S \subseteq V(G)$, seja $G - S$ o subgrafo obtido de G pela remoção dos vértices de S . Dizemos que $S \subseteq V(G)$ é um *separador* $u - v$ para vértices $u \neq v$ de um grafo G conexo se $G - S$ é desconexo e contém u e v , e que S é um separador se é um separador $u - v$ para $u \neq v \in V(G)$.

Uma *árvore* é um grafo conexo sem ciclos. Uma *floresta* é um grafo cujas componentes conexas são árvores. Comumente, os vértices de uma árvore são chamados de *nós*, os vértices de grau 1 de *folhas* e os demais de *nós internos*.

Um grafo G é *bipartido* se $V(G)$ pode ser particionado em conjuntos V_1 e V_2 de modo que toda aresta de G é do tipo $v_1 v_2$ para $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$. Um grafo G é *bipartido completo* se $v_1 v_2 \in E(G)$ para todo $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$. Seja $K_{p,q}$ o grafo bipartido completo com p vértices em V_1 e q vértices em V_2 . Sabe-se que um grafo é bipartido se e só se não tem ciclos ímpares. Portanto, toda árvore é um grafo bipartido.

Uma *coloração* de um grafo G é uma atribuição de cores $c(v)$ para cada vértice v de G de modo que vértices adjacentes tenham cores diferentes. O *número cromático* de G , denotado por $\chi(G)$, é o menor número natural k tal que G admite uma coloração com k cores. Note que os vértices de uma mesma cor formam um conjunto independente e que vale o seguinte: $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. Sabe-se que um grafo é bipartido se e só se $\chi(G) \leq 2$.

Um grafo é *cordal* se todo ciclo induzido é um triângulo. Sabe-se que todo grafo cordal possui uma *ordem de eliminação perfeita*: uma sequência de remoções de vértices em que cada vértice removido é simplicial no subgrafo atual, onde um vértice v é *simplicial* se sua vizinhança fechada $N[v]$ induz uma clique.

Um grafo é *distância-hereditária* se todo caminho induzido é mínimo. Além disso, um grafo é *ptolemaico* se é cordal e distância hereditária. Sabe-se que todo separador minimal de um grafo cordal é uma clique (Dirac 1961). Além disso:

Teorema A.1 (Kumar e Madhavan 1998). *Se S é um separador u - v minimal de um grafo cordal G , então as componentes conexas de $G - S$ contendo u ou v têm um vértice adjacente a todo vértice de S .*

Um grafo é *planar* se pode ser desenhado no plano sem cruzamento de arestas de modo que vértices representam pontos e arestas representam curvas entre os pontos. Um grafo é *periplanar* (em inglês, *outerplanar*) se pode ser desenhado no plano sem cruzamento de arestas de modo que todo vértice pertence à face externa.

Um *digrafo* (ou *grafo direcionado*) é uma generalização de grafo em que as arestas são pares ordenados de vértices distintos (também chamadas de *arcos*). Ou seja, xy e yx representam arestas (arcos) diferentes. Seja o grau de entrada $d^-(v)$ (saída $d^+(v)$) de um vértice v o número de arestas vx (resp. xv) para $x \in V(G)$. Um vértice é uma *fonte* (resp. *sumidouro*) se $d^+(v) = 1$ (resp. $d^-(v) = 1$). Um digrafo é um DAG (*directed acyclic graph*) se não tem ciclos direcionados.

B

Complexidade Computacional

Complexidade de Tempo

Em um *problema de decisão*, é dada uma instância e pede-se uma resposta SIM ou NÃO a uma pergunta sobre a instância. Por exemplo, no Problema COBERTURA DE VÉRTICES de decisão, a instância é um grafo G e um inteiro $k \geq 1$, sendo a pergunta se existe um subconjunto $S \subseteq V(G)$ com $|S| \leq k$ tal que toda aresta tem uma extremidade em S .

A *Classe P* é definida como o conjunto dos problemas de decisão com algoritmos polinomiais que os resolvem. A *Classe NP* é definida como o conjunto dos problemas de decisão *verificáveis* em tempo polinomial. Ou seja, se for dado um *certificado* (ou *prova*) de que a instância tem resposta SIM, é possível verificar em tempo polinomial que o *certificado* é válido (o certificado prova que a instância tem de fato resposta SIM). Como exemplo, provamos que o problema COBERTURA DE VÉRTICES é da classe NP.

Teorema B.1 (Garey e Johnson 1979). *COBERTURA DE VÉRTICES pertence à classe NP.*

Demonstração. Para certificado de uma instância (G, k) , considere um subconjunto S de vértices do grafo G . O algoritmo verificador para o certificado S deve verificar: (a) se $|S| \leq k$ e (b) se toda aresta de G possui pelo menos uma extremidade em S . Para (a), basta contar os elementos de S , em tempo $O(k) = O(n)$. Para (b), basta verificar para cada aresta de G ($O(n^2)$) se alguma de suas extremidades está em S ($|S| = k \leq n$), levando tempo total de $O(kn^2) = O(n^3)$. Logo verificamos se S é cobertura para G em tempo polinomial $O(n) + O(n^3) = O(n^3)$. ■

Dados problemas de decisão A e B , dizemos que $A \preceq_p B$ (A se reduz polinomialmente a B) se existe um algoritmo f (função de redução) polinomial que, para cada instância I de A , obtém uma instância $f(I)$ de B tal que: I é SIM em A se e só se $f(I)$ é SIM em B .

Um problema de decisão B é NP-difícil se, para todo $A \in \text{NP}$, temos $A \preceq_p B$, isto é, qualquer problema em NP se reduz polinomialmente a B . Um problema é NP-completo se é NP-difícil e se pertence a NP.

Abaixo mostramos um resultado clássico de Complexidade.

Teorema B.2 (Garey e Johnson 1979). *Se um problema B é NP-completo e $B \in P$, então $P = \text{NP}$. Além disso, se $P = \text{NP}$, então todo problema NP-completo está em P .*

A questão $P = \text{NP}$ é uma das mais importantes e antigas da Ciência da Computação, que continua sem resposta. É também um dos sete problemas do milênio do Instituto Clay de Matemática, com um prêmio de 1 milhão de dólares para quem resolvê-lo. De acordo com o Teorema B.2, uma forma de resolver tal questão é mostrar a existência de um problema $B \in P$ que seja NP-completo. Mostrando que não existe um problema $B \in P$ que seja NP-completo, podemos concluir, pelo Teorema B.2, que $P \neq \text{NP}$.

Outra importância do Teorema B.2, além de ajudar a resolver a questão $P = \text{NP}$, é que podemos classificar os problemas pelo grau de dificuldade, pois, uma vez que mostramos que um problema é NP-completo, também estamos mostrando que esse problema não possui algoritmo polinomial conhecido e que encontrar esse algoritmo polinomial é bem difícil, se ele existir. Dizemos que um problema em P é tratável (ou fácil) de resolver enquanto os problemas NP-difíceis são intratáveis (ou difíceis) de resolver.

Com isso, percebe-se a importância de se mostrar que um problema é NP-completo. Para isso, mostramos abaixo uma ferramenta muito usada.

Teorema B.3 (Garey e Johnson 1979). *Se B é NP-completo, $C \in \text{NP}$ e $B \preceq_p C$, então C é NP-completo.*

Com o Teorema B.3, podemos mostrar que um problema é NP-completo sem utilizar diretamente a definição. A dificuldade passa a ser encontrar um problema NP-completo e uma redução polinomial desse problema para o problema que queremos mostrar ser NP-completo.

O primeiro problema provado NP-completo foi o Problema SAT, aqui definido. Uma fórmula lógica está na forma normal conjuntiva (FNC)

se consiste de conjunções (operador lógico *e* (*and*), denotado por $\wedge$) de cláusulas, que consistem de disjunções (operador *ou* (*or*), denotado por $\vee$) de literais (variável lógica ou complemento). Por exemplo, a fórmula $\phi = (x_1 \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \overline{x_3})$ está na FNC e tem 3 variáveis (x_1 , x_2 e x_3) e 3 cláusulas com 2 literais cada. Uma fórmula na FNC é *satisfatível* se existe uma atribuição de V ou F às variáveis que torne a fórmula verdadeira. No exemplo acima, ϕ é satisfatível, atribuindo V para x_1 , x_2 e x_3 .

No Problema SAT, a instância é uma fórmula ϕ na FNC e sua pergunta é a seguinte: ϕ é satisfatível? No Problema 3SAT, a única diferença consiste em que a fórmula ϕ possui 3 literais por cláusula. Partindo do Problema SAT e utilizando o Teorema B.3, é possível provar que o Problema 3SAT também é NP-completo.

Abaixo, ilustra-se uma prova de NP-completude a partir de 3SAT.

Teorema B.4 (Garey e Johnson 1979). COBERTURA DE VÉRTICES é NP-completo.

Demonstração. Pelo Teorema B.1, COBERTURA DE VÉRTICES está em NP. Vamos obter uma redução polinomial de 3SAT para COBERTURA DE VÉRTICES, transformando qualquer instância Φ de 3SAT em uma instância (G, k) de COBERTURA DE VÉRTICES. Sejam v e c o número de variáveis e cláusulas de ϕ , respectivamente.

Construção: (a) para cada variável x de Φ , criar vértices x e $\overline{x}$ (*vértices variáveis*); e uma aresta $x\overline{x}$ em G ; (b) para cada cláusula $(x \vee y \vee z)$ de Φ , criar 3 vértices novos x , y e z (*vértices cláusulas*), com arestas xy , xz e yz ; (c) ligar os vértices variáveis aos vértices cláusulas que correspondem ao mesmo literal em Φ ; e (d) tomar $k = v + 2c$.

A Figura B.1 mostra o exemplo para $\phi = (x_1 \vee x_2 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_2})$. G possui $2v + 3c$ vértices e $v + 6c$ arestas e (G, k) é gerado em tempo polinomial. Mostramos que ϕ é satisfatível se e só se G possui uma cobertura de tamanho $k = v + 2c$.

Se ϕ é satisfatível, então existe uma valoração V ou F válida para as variáveis de ϕ em que cada cláusula de ϕ é V. Escolha os vértices variáveis de G que correspondem aos literais V da valoração e, para cada cláusula C , escolha dois vértices cláusulas de C de modo que o terceiro vértice cláusula corresponda a um literal V na valoração. Veja que temos $v + 2c = k$ vértices escolhidos. Note que cada aresta de G possui uma extremidade que é um vértice escolhido: para as arestas criadas em (a), exatamente um dos literais

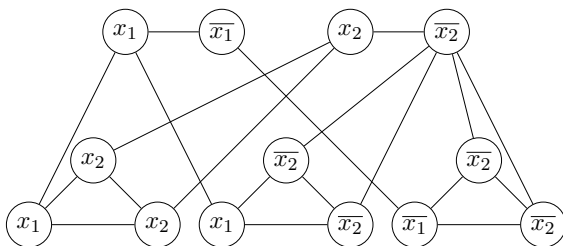


Figura B.1: $\phi = (x_1 \vee x_2 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2)$. Os *vértices de variáveis* estão em cima e os *vértices de cláusula* estão embaixo. As arestas de cima para baixo ligam vértices de literais correspondentes.

x ou $\bar{x}$ foi escolhido; para as arestas criadas nos ciclos de tamanho três em (b), dois vértices de cada ciclo foram escolhidos; e para cada aresta criada em (c), uma de suas extremidades é vértice variável u_v , e a outra é um vértice cláusula u_c . Se u_v não é escolhido, corresponde a um literal F para a valoração e, nessa situação, u_c é escolhido, isto é, pelo menos uma das extremidades é um vértice escolhido. Desse modo, os vértices escolhidos formam uma cobertura de vértices de tamanho k para G .

Suponha que temos uma cobertura C , com tamanho $k \leq v + 2c$, para o grafo G (construído a partir de ϕ). Veja que necessariamente temos que qualquer cobertura de vértice C' de G deve cobrir cada aresta criada em (a) com pelo menos um vértice e cada aresta dos ciclos criados (b) com pelo menos dois vértices. Isso implica que cada cobertura de vértices de G deve possuir tamanho pelo menos $v + 2c$. Logo $v + 2c \leq |C| = k \leq v + 2c$ e, portanto, $|C| = v + 2c$. Como temos $v + 2c$ vértices em C necessariamente temos que C possui exatamente um vértice para cada estrutura criada em (a) e exatamente dois vértices para cada estrutura criada em (b). Para os vértices de C que foram criados em (a), dê a valoração ao seu literal correspondente como V e o seu literal oposto como F. Como temos que, para cada cláusula, existe um vértice cláusula que não está na cobertura e a aresta criada em (c) que sai dele está coberta pelo vértice variável (para o qual valoramos seu literal como V), então cada cláusula possui pelo menos um literal V. Portanto, essa valoração satisfaz ϕ . Utilizando o Teorema B.3, concluímos nosso resultado. ■

Complexidade de Espaço

Além da complexidade de tempo, existe também a complexidade de espaço, análoga para células de memória necessárias em um algoritmo em vez do tempo de execução. Similarmente às classes P, NP, NP-difícil e NP-completa, existem as classes PSPACE, NPSPACE, PSPACE-difícil e PSPACE-completa. Contudo, na complexidade de espaço, $PSPACE = NPSPACE$ pelo Teorema de Savitch. Sabe-se também que $P \subseteq NP \subseteq PSPACE$.

O primeiro problema provado PSPACE-completo foi QSAT (*Quantified SAT*) por Stockmeyer e Meyer (1973), definido a seguir. É dada uma fórmula lógica com variáveis de modo que toda variável está quantificada com $\exists$ (existe) ou $\forall$ (para todo) no início da fórmula. O objetivo é decidir se a fórmula é verdadeira ou falsa. Por exemplo, a fórmula $\forall x_1 \exists x_2 (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2)$ é falsa, pois tomando x_1 falso, a fórmula será sempre falsa, independente do valor de x_2 . Por outro lado, a fórmula $\exists x_1 \forall x_2 (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2)$ é verdadeira, pois tomando x_1 verdadeiro, a fórmula será sempre verdadeira, independente do valor de x_2 . QSAT pode ser visto como um jogo de dois jogadores, Alice e Bob, que atribuem valores segundo a ordem da quantificação da fórmula. Alice (resp. Bob) só pode atribuir valores a variáveis quantificadas com $\exists$ (resp. $\forall$). Alice vence se tornar a fórmula verdadeira, e Bob vence se tornar a fórmula falsa.

Após a prova da PSPACE-completude de QSAT, vários problemas foram provados PSPACE-completos, muitos deles sobre jogos com dois jogadores. Um dos mais antigos, por exemplo, é o jogo KAYLES em que dois jogadores alternam jogadas selecionando vértices de um grafo de modo que os vértices selecionados induzem um conjunto independente no grafo. O último a conseguir jogar vence o jogo (obtendo um conjunto independente maximal). No jogo de formação de cliques, os vértices devem formar uma clique, ao invés de um conjunto independente. Sabe-se que os problemas de decidir qual jogador possui uma estratégia vencedora no jogo KAYLES e no jogo CLIQUE-FORMING são PSPACE-completos (Schaefer 1978).

Complexidade Parametrizada

Com a motivação para tratar problemas NP-difíceis e classificá-los quanto ao grau de dificuldade de resolução, Downey e Fellows introdu-

ziram a Teoria da Complexidade Parametrizada. Recomenda-se o livro *Parameterized Complexity* de Downey e Fellows (2012).

Seguimos abaixo as notações do livro *Parameterized Complexity Theory* de Flum e Grohe (2006). Um *parâmetro* k para um problema computacional Q é uma função que atribui um número natural $k(x)$ para cada instância x do problema Q . Quando a instância x do problema estiver clara no contexto, podemos escrever simplesmente k ao invés de $k(x)$. Um *problema parametrizado* é um par (Q, k) , sendo Q é um problema de decisão e k um parâmetro do problema Q . Abaixo mostramos alguns exemplos de problemas parametrizados.

No problema parametrizado 3-COLORAÇÃO(Δ), a instância é um grafo G , o parâmetro é $\Delta(G)$ (grau máximo de G) e a pergunta é se existe uma coloração própria de vértices de G usando no máximo 3 cores. No problema parametrizado COBERTURA DE VÉRTICES(k), a instância é um grafo G e um inteiro k , o parâmetro é k e a pergunta é se existe $S \subseteq V(G)$, com $|S| \leq k$, em que cada aresta de G tem uma extremidade em S . No problema parametrizado CLIQUE(k), a instância é um grafo G e um inteiro k , o parâmetro é k e a pergunta é se existe $S \subseteq V(G)$, com $|S| \leq k$, em que todos os vértices de S são adjacentes entre si. No problema parametrizado DOMINANTE(k), a instância é um grafo G e um inteiro k , o parâmetro é k e a pergunta é se existe $S \subseteq V(G)$, com $|S| \leq k$, em que cada vértice de $G - S$ possui um vizinho em S .

Também é possível parametrizar em um número constante de parâmetros, $k_1, k_2, \dots, k_c$. Nesse caso, considera-se que o parâmetro k do problema parametrizado é a soma $k = k_1 + \dots + k_c$. Um exemplo é o problema DOMINANTE(Δ, k), com mesma instância e pergunta de DOMINANTE(k), mas parametrizado por $\Delta(G)$ e k , ou seja, tem $\Delta(G) + k$ como parâmetro.

Dado um problema computacional Q , um *algoritmo* XP em um parâmetro k de Q é um algoritmo que executa em tempo $O(f(k) \cdot n^{g(k)})$, em que n é o tamanho da instância de Q , k é o parâmetro e f e g são funções computáveis. Define-se a *Classe* XP como o conjunto dos problemas parametrizados que têm algoritmos XP. Essa classe contém os problemas parametrizados que admitem algoritmo polinomial no tamanho da instância quando os parâmetros são fixos.

Dado um problema computacional Q , um *algoritmo* FPT (tratável por parâmetro fixo) com relação a um parâmetro k do problema Q é um algoritmo que executa em tempo $O(f(k) \cdot n^{O(1)})$, em que k é o parâmetro,

n o tamanho da representação da instância do problema parametrizado e f uma função computável. Define-se a *Classe* FPT como o conjunto dos problemas parametrizados que possuem algoritmos FPT.

Temos o análogo da redução polinomial da Teoria da Complexidade Clássica. Dados problemas parametrizados (Q, k) e (Q', k') , uma *redução* FPT de (Q, k) para (Q', k') (denota-se $(Q, k) \preceq_{\text{FPT}} (Q', k')$) é um algoritmo R que, para toda instância x de Q , obtém uma instância $x' = R(x)$ de Q' tal que (a) x é SIM em Q se e só se x' é SIM em Q' , (b) existe uma função computável g tal que $k'(x') \leq g(k(x))$ para toda instância x de Q e (c) R é computável por um algoritmo FPT (no parâmetro k).

Lema B.5 (Preservação da tratabilidade por parâmetro fixo).

Se $(Q, k) \preceq_{\text{FPT}} (Q', k')$ e $(Q', k') \in \text{FPT}$, então $(Q, k) \in \text{FPT}$.

Duas classes importantes de problemas parametrizados são as *Classes* $W[1]$ e $W[2]$. Omitiremos a definição original dessas classes, pois depende da definição de circuitos booleanos. Fornecemos aqui definições alternativas mais simples (como em (Flum e Grohe 2006)). Seja $W[1]$ a classe dos problemas parametrizados que possuem uma redução FPT para o problema $\text{CLIQUE}(k)$. Seja $W[2]$ a classe dos problemas parametrizados que possuem uma redução FPT para o problema $\text{DOMINANTE}(k)$.

Assim como $P \subseteq NP$ na Complexidade Clássica, temos que $\text{FPT} \subseteq W[1] \subseteq W[2] \subseteq \text{XP}$ na Complexidade Parametrizada.

Para $t \in \{1, 2\}$, dizemos que um problema parametrizado (Q', k') é $W[t]$ -difícil se para todo problema $(Q, k) \in W[t]$, temos que $(Q, k) \preceq_{\text{FPT}} (Q', k')$. Além disso, (Q', k') é $W[t]$ -completo se é $W[t]$ e $W[t]$ -difícil.

Assim como há a conjectura $P \neq NP$ na Teoria da Complexidade clássica, também existe a conjectura $\text{FPT} \neq W[1] \neq W[2]$ na Complexidade Parametrizada. Sabe-se que, se um problema $W[1]$ -completo estiver em FPT, então $\text{FPT} = W[1]$ e, se um problema $W[2]$ -completo estiver em $W[1]$, então $W[1] = W[2]$. Sabe-se ainda que $\text{COBERTURA DE VÉRTICES}(k)$ pertence a FPT e que, pela definição dada acima das Classes $W[1]$ e $W[2]$, o problema $\text{CLIQUE}(k)$ é $W[1]$ -completo e o problema $\text{DOMINANTE}(k)$ é $W[2]$ -completo.

Bibliografia

- Abraham, I., C. Gavaille, A. Gupta, O. Neiman e K. Talwar (2019). “Cops, Robbers, and Threatening Skeletons: Padded Decomposition for Minor-Free Graphs”. Em: *SIAM J. Comput.* 48.3, pp. 1120–1145 (ver p. 155).
- Abramovskaya, T. V., F. V. Fomin, P. A. Golovach e M. Pilipczuk (2016). “How to hunt an invisible rabbit on a graph”. Em: *Eur. J. Comb.* 52, pp. 12–26 (ver p. 161).
- Abreu, M., M. Funk, D. Labbate e V. Napolitano (2008). “A family of regular graphs of girth 5”. Em: *Discrete Mathematics* 308.10, pp. 1810–1815 (ver p. 151).
- Adachi, A., S. Iwata e T. Kasai (1979). “Classes of Pebble Games and Complete Problems”. Em: *SIAM J. Comput.* 8.4, pp. 574–586 (ver p. 149).
- (1984). “Some Combinatorial Game Problems Require $\Omega(n^k)$ Time”. Em: *J. ACM* 31.2, pp. 361–376 (ver p. 149).
- Aigner, M. e M. Fromme (1984). “A Game of Cops and Robbers.” Em: *Discret. Appl. Math.* 8, pp. 1–12 (ver pp. 148, 151, 153, 154, 156).
- Alon, N. e A. Mehrabian (2011). “On a Generalization of Meyniel’s Conjecture on the Cops and Robbers Game”. Em: *Electr. J. Comb.* 18.1 (ver p. 160).
- Alspach, B. (2004). “Searching and sweeping graphs: a brief survey.” Em: *Le Matematiche*, pp. 5–37 (ver p. 145).
- Alus, L., H. van den Herik 1 e M. P. Huntjens (1996). “Go-Moku solved by new search techniques”. Em: *Computational Intelligence* 12.1, pp. 7–23 (ver p. 53).
- “Amusements in Mathematics” (1917). Em: *Nature* 100, pp. 302–303. DOI: 10.1038/100302a0 (ver pp. 3, 112).
- Andreae, T. (1984). “Note on a pursuit game played on graphs.” Em: *Discret. Appl. Math.* 9, pp. 111–115 (ver p. 153).

- Andreae, T. (1986). “On a pursuit game played on graphs for which a minor is excluded.” Em: *J. Comb. Theory, Ser. B* 41.1, pp. 37–47 (ver p. 155).
- Andres, S. D., M. A. Huggan, F. Mc Inerney e R. J. Nowakowski (2019). “The orthogonal colouring game”. Em: *Theor. Comput. Sci.* 795, pp. 312–325 (ver p. 66).
- Andres, S. D. e E. Lock (2019). “Characterising and recognising game-perfect graphs”. Em: *Discret. Math. Theor. Comput. Sci.* vol. 21 no. 1, ICGT 2018 (ver p. 130).
- Angeltveit, V. e B. D. McKay (2024). $R(5, 5) \leq 46$. arXiv: 2409.15709 [math.CO] (ver p. 45).
- Anstee, R. P. e M. Farber (1988). “On bridged graphs and cop-win graphs.” Em: *J. Comb. Theory, Ser. B* 44.1, pp. 22–28 (ver p. 148).
- Appel, K. e W. Haken (1976). “Every planar map is four colorable”. Em: *Bull. Amer. Math. Soc.* 82.5, pp. 711–712 (ver p. 120).
- Araújo, J., M. C. Dourado, F. Protti e R. M. Sampaio (2025). *Introduction to Graph Convexity: an algorithmic approach*. Springer Cham (ver pp. 99–101, 116).
- Araújo, S. N., J. M. Brito, R. Folz, R. de Freitas e R. M. Sampaio (2024). “Graph convexity impartial games: Complexity and winning strategies”. Em: *Theor. Comput. Sci.* 998, p. 114534 (ver pp. 99, 105, 107, 109, 110).
- (2025). “Algorithms and complexity of graph convexity partizan games”. Em: *Theor. Comput. Sci.* 1044, p. 115267 (ver pp. 100, 192).
- Arora, S. e B. Barak (2009). *Computational Complexity: A Modern Approach*. Cambridge University Press (ver pp. 76, 77).
- Asdre, K., K. Ioannidou e S. D. Nikolopoulos (2007). “The harmonious coloring problem is NP-complete for interval and permutation graphs”. Em: *Discret. Appl. Math.* 155.17, pp. 2377–2382 (ver p. 120).
- Bagan, G., É. Duchêne, V. Gledel, T. Lehtilä e A. Parreau (2024). “Partition strategies for the Maker-Breaker domination game”. Em: *CoRR* abs/2406.15165 (ver p. 65).
- Baird, W., A. Beveridge, A. Bonato, P. Codenotti, A. Maurer, J. McCauley e S. Valeva (2014). “On the minimum order of k-cop win graphs”. Em: *Contributions Discret. Math.* 9.1 (ver p. 152).
- Baird, W. e A. Bonato (2012). “Meyniel’s conjecture on the cop number: a survey”. Em: *Journal of Combinatorics* 3, pp. 225–238 (ver p. 145).

- Balister, P., A. Shaw, B. Bollobás e B. P. Narayanan (2017). “Catching a fast robber on the grid”. Em: *J. Comb. Theory A* 152, pp. 341–352 (ver p. 160).
- Balogh, J. e W. Samotij (2011). “On the Chvátal-Erdős Triangle Game”. Em: *Electron. J. Comb.* 18.1 (ver p. 67).
- Bartnicki, T., B. Brešar, J. Grytczuk, M. Kovše, Z. Miechowicz e I. Peterin (2008). “Game Chromatic Number of Cartesian Product Graphs”. Em: *Electronic Journal of Combinatorics* 15, R72 (ver p. 122).
- Beaudou, L. (2004). “Le gendarme et le voleur, recherche d'intrus dans un graphe”. master thesis (in French). ENS Lyon, France (ver p. 149).
- Beck, J. (1981a). “On positional games”. Em: *J. Comb. Theory Ser. A*. 30.2, pp. 117–133 (ver pp. 32, 43, 49).
- (1981b). “Van der waerden and ramsey type games”. Em: *Combinatorica* 1, pp. 103–116 (ver pp. 5, 36, 41, 44, 45).
- (1982). “Remarks on positional games I”. Em: *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 40, pp. 65–71 (ver pp. 36, 38, 67).
- (2002). “Positional Games and the Second Moment Method”. Em: *Combinatorica* 22, pp. 169–216 (ver pp. 46, 61, 70).
- (2008). *Combinatorial Games Tic-Tac-Toe Theory*. Cambridge (ver pp. 6, 32, 46, 50, 70).
- Bednarska, M. e T. Łuczak (2000). “Biased positional games for which random strategies are nearly optimal”. Em: *Combinatorica* 20.4, pp. 477–488 (ver p. 69).
- Bell, G. I., D. S. Hirschberg e P. Guerrero-García (2007). “The minimum size required of a solitaire army”. Em: *Integers* 7.1, G07 (ver p. 33).
- Benesh, B. J., D. C. Ernst, M. Meyer, S. K. Salmon e N. Sieben (2025). “Impartial geodetic building games on graphs”. en. Em: *Int. J. Game Theory* (ver pp. 99, 107–109).
- Bensmail, J., F. Fioravantes, F. Mc Inerney e N. Nisse (2022). “The Largest Connected Subgraph Game”. Em: *Algorithmica* 84.9, pp. 2533–2555 (ver p. 66).
- Bensmail, J., F. Fioravantes, F. Mc Inerney, N. Nisse e N. Oijid (2023). “The Maker-Breaker Largest Connected Subgraph game”. Em: *Theor. Comput. Sci.* 943, pp. 102–120 (ver p. 65).
- Berarducci, A. e B. Intrigila (1993). “On the cop number of a graph”. Em: *Adv. in Applied Math.* 14, pp. 389–403 (ver pp. 88, 149).

- Berlekamp, E. R., J. H. Conway e R. K. Guy (1982). *Winning Ways for Your Mathematical Plays*. Vol. 1. Academic Press (ver pp. vii, 4, 165, 174, 182).
- Bodlaender, H. L. (1991). “On the complexity of some coloring games”. Em: *Int. J. Found. Comput. Sci.* 2.2, pp. 133–147 (ver pp. 13, 14, 85, 120, 127).
- Bodlaender, H. L. e D. Kratsch (2002). “Kayles and Nimbers”. Em: *Journal of Algorithms* 43.1, pp. 106–119 (ver p. 4).
- Bohman, T., A. Frieze e B. Sudakov (2008). “The game chromatic number of random graphs”. Em: *Random Struct Algor.* 32.2, pp. 223–235 (ver p. 122).
- Bolkema, J. e C. Groothuis (2019). “Hunting rabbits on the hypercube”. Em: *Discrete Mathematics* 342.2, pp. 360–372 (ver p. 161).
- Bollobás, B., G. Kun e I. Leader (2013). “Cops and robbers in a random graph”. Em: *J. Comb. Theory, Ser. B* 103.2, pp. 226–236 (ver pp. 152, 157).
- Bonato, A., N. E. Clarke, S. Finbow, S. L. Fitzpatrick e M. Messinger (2014). “A note on bounds for the cop number using tree decompositions”. Em: *Contributions Discret. Math.* 9.2 (ver p. 156).
- Bonato, A., P. A. Golovach, G. Hahn e J. Kratochvíl (2009). “The capture time of a graph”. Em: *Discrete Mathematics* 309.18, pp. 5588–5595 (ver p. 160).
- Bonato, A., P. Gordinowicz, B. Kinnnersley e P. Pralat (2013). “The Capture Time of the Hypercube”. Em: *Electr. J. Comb.* 20.2, P24 (ver p. 160).
- Bonato, A., G. Hahn e C. Tardif (2010). “Large classes of infinite k-cop-win graphs”. Em: *Journal of Graph Theory* 65.4, pp. 334–342 (ver p. 159).
- Bonato, A., G. Hahn e C. Wang (2007). “The cop density of a graph”. Em: *Contributions to Discrete Mathematics* 2.2 (ver pp. 157, 159).
- Bonato, A., M. A. Huggan, T. G. Marbach e F. Mc Inerney (2021). “The game of Cops and Eternal Robbers”. Em: *Theor. Comput. Sci.* 874, pp. 80–93 (ver p. 160).
- Bonato, A., G. Kemkes e P. Pralat (2012). “Almost all cop-win graphs contain a universal vertex”. Em: *Discrete Mathematics* 312.10, pp. 1652–1657 (ver p. 157).
- Bonato, A. e R. Nowakowski (2011). *The game of Cops and Robber on Graphs*. American Math. Soc. (ver p. 145).

- Bonato, A., P. Pralat e C. Wang (2007). “Pursuit-Evasion in Models of Complex Networks”. Em: *Internet Mathematics* 4.4, pp. 419–436 (ver pp. 157, 158).
- Bonnet, É., S. Gaspers, A. Lambilliotte, S. Rümmele e A. Saffidine (2017). “The Parameterized Complexity of Positional Games”. Em: *ICALP 2017*. Vol. 80, 90:1–90:14 (ver p. 60).
- Bouton, C. L. (1901). “Nim, Game with Complete Mathematical Theory”. Em: *Annals Math* 3.1/4, pp. 35–39 (ver pp. vii, 4, 21–23).
- Brešar, B., P. Dorbec, S. Klavžar, G. Košmrlj e G. Renault (2016). “Complexity of the game domination problem”. Em: *Theoretical Computer Science* 648, pp. 1–7 (ver p. 134).
- Brešar, B., M. A. Henning, S. Klavžar e D. F. Rall (2021). *Domination Games Played on Graphs*. SpringerBriefs in Mathematics, Springer Cham (ver pp. vii, 134, 137).
- Brešar, B., S. Klavžar e D. F. Rall (2010). “Domination Game and an Imagination Strategy”. Em: *SIAM J. Discrete Math.* 24.3, pp. 979–991 (ver pp. 134, 136).
- Britnell, J. R. e M. Wildon (2013). “Finding a Princess in a Palace: a Pursuit-Evasion Problem”. Em: *The Electronic Journal of Combinatorics* 20.1, p. 25 (ver p. 161).
- Brito, J. M., T. Marclon, N. A. Martins e R. M. Sampaio (2025). *The Normal Play of the Domination Game*. arXiv: 2502.13118 [math.CO] (ver pp. 134, 139, 141, 142).
- Brosse, C., N. A. Martins, N. Nisse e R. M. Sampaio (2025). “The Convex Set Forming Game”. Em: *Theor. Comput. Sci.* 1046, p. 115323 (ver pp. 12, 83, 112–114).
- Buckley, F. e F. Harary (1985a). “Closed geodetic games for graphs”. Em: *Congr. Numer.* 47. Proc. of 16th Southeastern Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing, pp. 131–138 (ver pp. 99, 101).
- (1985b). “Geodetic games for graphs”. Em: *Quaestiones Mathematicae* 8, pp. 321–334 (ver pp. 99, 101).
- Bujtás, C. (2015). “On the Game Domination Number of Graphs with Given Minimum Degree”. Em: *The Electronic Journal of Combinatorics* 22.3, P3.29 (ver p. 137).
- Carrol, L. (1865). *Alice’s Adventures in Wonderland* (ver p. 3).
- (1886). *The Game of Logic* (ver p. 3).

- Chalopin, J., V. Chepoi, N. Nisse e Y. Vaxès (2011). “Cop and Robber Games When the Robber Can Hide and Ride”. Em: *SIAM J. Discrete Math.* 25.1, pp. 333–359 (ver p. 160).
- Chandra, A. K., D. Kozen e L. J. Stockmeyer (1981). “Alternation”. Em: *J. ACM* 28.1, pp. 114–133 (ver p. 149).
- Chandra, A. K. e L. J. Stockmeyer (1976). “Alternation”. Em: *FOCS*. IEEE, pp. 98–108 (ver p. 149).
- Chandran S. V., U., S. Klavžar, N. P. K. e R. M. Sampaio (2024). “The general position avoidance game and hardness of general position games”. Em: *Theor. Comput. Sci.* 988, p. 114370 (ver pp. 4, 12, 84, 112, 120).
- Charpentier, C., H. Hocquard, É. Sopena e X. Zhu (2020). “A connected version of the graph coloring game”. Em: *Discret. Appl. Math.* 283, pp. 744–750 (ver pp. 85, 131).
- Chastand, M., F. Laviolette e N. Polat (2000). “On constructible graphs, infinite bridged graphs and weakly cop-win graphs”. Em: *Discrete Mathematics* 224.1-3, pp. 61–78 (ver p. 159).
- Chepoi, V. (1997). “Bridged Graphs Are Cop-Win Graphs: An Algorithmic Proof.” Em: *J. Comb. Theory, Ser. B* 69.1, pp. 97–100 (ver p. 148).
- Chiniforooshan, E. (2008). “A better bound for the cop number of general graphs”. Em: *Journal of Graph Theory* 58.1, pp. 45–48 (ver pp. 158, 159).
- Chvátal, V. e P. Erdős (1978). “Biased Positional Games”. Em: *Algorithmic Aspects of Combinatorics*. Vol. 2. Annals of Discrete Mathematics. Elsevier, pp. 221–229 (ver pp. 5, 37, 50, 62, 66, 67, 69).
- Clarke, N. E. (2009). “A witness version of the Cops and Robber game”. Em: *Discrete Mathematics* 309.10, pp. 3292–3298 (ver p. 160).
- Clarke, N. E. e E. L. Connon (2006). “Cops, Robber, and Alarms”. Em: *Ars Comb.* 81 (ver p. 160).
- Clarke, N. E., S. Fiorini, G. Joret e D. Theis (2012). “A little note on the cops and robber game on graphs embedded in non-orientable surfaces”. Em: *Graphs and Combinatorics*, pp. 1–6 (ver p. 155).
- Clarke, N. E. e G. MacGillivray (2012). “Characterizations of k-copwin graphs”. Em: *Discrete Mathematics* 312.8, pp. 1421–1425 (ver p. 149).
- Clarke, N. E. e R. J. Nowakowski (2000). “Cops, Robber, and Photo Radar”. Em: *Ars Comb.* 56 (ver p. 160).
- (2001). “Cops, Robber, and Traps.” Em: *Utilitas Mathematica* 60, pp. 91–98 (ver p. 160).

- (2005). “Tandem-win graphs.” Em: *Discrete Mathematics* 299.1-3, pp. 56–64 (ver p. 156).
- Cohen, N., N. A. Martins, F. Mc Inerney, N. Nisse, S. Pérennes e R. M. Sampaio (2018). “Spy-game on graphs: Complexity and simple topologies”. Em: *Theor. Comput. Sci.* 725, pp. 1–15 (ver p. 160).
- Cohen, N., F. Mc Inerney, N. Nisse e S. Pérennes (2020). “Study of a Combinatorial Game in Graphs Through Linear Programming”. Em: *Algorithmica* 82.2, pp. 212–244 (ver p. 160).
- Conway, J. H. (1976). *On numbers and games*. L.M.S. monographs ; no. 6. London: Academic Press (ver pp. vii, 4, 167, 168, 174, 178).
- Cook, S. A. (1971). “The complexity of theorem-proving procedures”. Em: *Proceedings of the Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. STOC '71, pp. 151–158 (ver pp. 5, 77).
- Costa, E. R., V. L. Pessoa, R. M. Sampaio e R. Soares (2020). “Pspace-completeness of two graph coloring games”. Em: *Theor. Comput. Sci.* 824-825, pp. 36–45 (ver pp. 4, 85, 127, 128, 130).
- Costa, E. R., N. A. Martins e R. M. Sampaio (2022). “Spy game: FPT-algorithm, hardness and graph products”. Em: *Theor. Comput. Sci.* 923, pp. 304–317 (ver p. 160).
- Dailly, A., H. Gahlawat e Z. M. Myint (2024). “The Closed Geodetic Game: algorithms and strategies”. Em: *arXiv:2409.20505* (ver pp. 99, 107).
- Das, S. e H. Gahlawat (2022). “On the Cop Number of String Graphs”. Em: *ISAAC-2022*. Vol. 248. LIPIcs, 45:1–45:18 (ver p. 156).
- Das, S., H. Gahlawat, U. K. Sahoo e S. Sen (2021). “Cops and Robber on some families of oriented graphs”. Em: *Theor. Comput. Sci.* 888, pp. 31–40 (ver p. 159).
- Dettlaff, M., H. Furmańczyk, I. Peterin, A. Roux e R. Ziemann (2024). “A new approach to b-coloring of regular graphs”. Em: *Applied Mathematics and Computation* 481, p. 128914 (ver p. 120).
- Dinski, T. e X. Zhu (1999). “A bound for the game chromatic number of graphs”. Em: *Discrete Mathematics* 196.1, pp. 109–115 (ver p. 122).
- Dirac, G. A. (1961). “On rigid circuit graphs”. Em: *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 25, pp. 71–76 (ver p. 199).
- Dissaux, T., F. Fioravantes, H. Gahlawat e N. Nisse (2023). “Recontamination Helps a Lot to Hunt a Rabbit”. Em: *MFCS 2023*. Vol. 272. LIPIcs, 42:1–42:14 (ver p. 161).

- Downey, R. e M. Fellows (2012). *Parameterized Complexity*. Springer, pp. xv+533 (ver p. 206).
- Duchêne, É., V. Gledel, F. Mc Inerney, N. Nisse, N. Oijid, A. Parreau e M. Stojaković (2025). “Complexity of Maker–Breaker games on edge sets of graphs”. Em: *Discret. Appl. Math.* 361, pp. 502–522 (ver pp. 62, 63).
- Duchêne, É., V. Gledel, A. Parreau e G. Renault (2020). “Maker-Breaker domination game”. Em: *Discret. Math.* 343.9, p. 111955 (ver p. 64).
- Duchêne, É., S. Gonzalez, A. Parreau, E. Rémila e P. Solal (2021). “influence: A partizan scoring game on graphs”. Em: *Theor. Comput. Sci.* 878-879, pp. 26–46 (ver p. 66).
- Duchêne, É., N. Oijid e A. Parreau (2024). “Bipartite instances of INFLUENCE”. Em: *Theor. Comput. Sci.* 982, p. 114274 (ver p. 66).
- Duchet, P. (1987). “Convexity in combinatorial structures”. Em: *Proceedings of the 14th Winter School on Abstract Analysis*. Circolo Matematico di Palermo, pp. 261–293 (ver p. 99).
- Dudeney, H. E. (1907). *The Canterbury Puzzles and other curious problems*. New York: E. P. Dutton, p. 258 (ver pp. 4, 27).
- (1917). *Amusements in Mathematics*. London, Edinburgh and New York: Thomas Nelson and Sons Ltd, pp. v+259 (ver pp. 3, 4, 112).
- Dunn, C., V. Larsen, K. Lindke, T. Retter e D. Toci (2015). “The game chromatic number of trees and forests”. Em: *Discret. Math. Theor. Comput. Sci.* Vol. 17 no.2, pp. 31–48 (ver p. 122).
- Epstein, L. e M. Levy (2005). “Online interval coloring and variants”. Em: *Automata, Languages and Programming*. Springer, pp. 602–613 (ver p. 130).
- Erdős, P. (1947). “Some remarks on the theory of graphs”. Em: *Bull. Amer. Math. Soc.* 53.4, pp. 292–294 (ver p. 45).
- Erdős, P., E. Fried, A. Hajnal e E. C. Milner (1972). “Some remarks on simple tournaments”. Em: *Algebra universalis* 2, pp. 238–245 (ver p. 99).
- Erdős, P. e A. Rényi (1960). “On the evolution of random graphs”. Em: *Publ. math. inst. hung. acad. sci.* 5.1, pp. 17–60 (ver p. 68).
- Erdős, P. e J. L. Selfridge (1973). “On a combinatorial game”. Em: *J. Comb. Theory Ser. A.* 14.3, pp. 298–301 (ver pp. 5, 31, 34, 36, 37, 39, 43, 46, 47, 54).
- Erdős, P. e G. Szekeres (1935). “A combinatorial problem in geometry”. Em: *Compositio Mathematica* 2, pp. 463–470 (ver pp. 45, 49, 60).

- Even, S. e R. Tarjan (1976). “A combinatorial problem which is complete in polynomial space”. Em: *J. ACM* 23.4, pp. 710–719 (ver p. 78).
- Faigle, U., U. Kern, H. Kierstead e W. Trotter (1993). “On the Game Chromatic Number of some Classes of Graphs”. Em: *Ars Combinatoria* 35, pp. 143–150 (ver pp. 122, 123, 130).
- Farber, M. (1987). “Bridged graphs and geodesic convexity.” Em: *Discret. Appl. Math.* 66, pp. 249–257 (ver p. 148).
- Farber, M. e R. E. Jamison (1986). “Convexity in graphs and hypergraphs”. Em: *SIAM J. Algebraic Discrete Methods* 7.3, pp. 433–444 (ver p. 109).
- Fitzpatrick, S. L. e R. J. Nowakowski (2001). “Copnumber of graphs with strong isometric dimension two”. Em: *Ars Comb.* 59, pp. 65–73 (ver p. 156).
- Flammenkamp, A. (1998). “Progress in the No-Three-in-Line Problem, II”. Em: *J. Comb. Theory Ser. A* 81.1, pp. 108–113 (ver p. 112).
- Flum, J. e M. Grohe (2006). *Parameterized Complexity Theory*. Springer-Verlag New York, pp. xiii+495 (ver pp. 206, 207).
- Fomin, F. V., F. Giroire, A. Jean-Marie, D. Mazauric e N. Nisse (2014). “To satisfy impatient Web surfers is hard”. Em: *Theor. Comput. Sci.* 526, pp. 1–17 (ver p. 160).
- Fomin, F. V., P. A. Golovach, A. Hall, M. Mihalák, E. Vicari e P. Widmayer (2011). “How to Guard a Graph?” Em: *Algorithmica* 61.4, pp. 839–856 (ver p. 160).
- Fomin, F. V., P. A. Golovach e J. Kratochvíl (2008). “On tractability of Cops and Robbers game”. Em: *IFIP-TCS*. Vol. 273, pp. 171–185 (ver pp. 150, 156).
- Fomin, F. V., P. A. Golovach, J. Kratochvíl, N. Nisse e K. Suchan (2010). “Pursuing a fast robber on a graph”. Em: *Theor. Comput. Sci.* 411.7-9, pp. 1167–1181 (ver pp. 78, 150, 156, 160).
- Fomin, F. V., P. A. Golovach e D. Lokshtanov (2010). “Cops and Robber Game without Recharging”. Em: *SWAT*. Vol. 6139. Lect. Notes Comput. Sci. Pp. 273–284 (ver pp. 150, 160).
- (2012). “Cops and Robber Game Without Recharging”. Em: *Theory Comput. Syst.* 50.4, pp. 611–620 (ver p. 160).
- Fraenkel, A. S. e E. Goldschmidt (1987). “Pspace-hardness of some combinatorial games”. Em: *J. Comb. Theory, Ser. A* 46.1, pp. 21–38 (ver p. 149).

- Fraenkel, A. S. e S. Simonson (1993). “Geography”. Em: *Theor. Comput. Sci.* 110.1, pp. 197–214 (ver p. 81).
- Frankl, P. (1987a). “Cops and Robbers in Graphs with large Girth and Cayley Graphs”. Em: *Discret. Appl. Math.* 17, pp. 301–305 (ver pp. 151, 152, 158).
- (1987b). “On a pursuit game on Cayley graphs”. Em: *Combinatorica* 7.1, pp. 67–70 (ver p. 156).
- Frieze, A. M., M. Krivelevich e P.-S. Loh (2012). “Variations on cops and robbers”. Em: *Journal of Graph Theory* 69.4, pp. 383–402 (ver p. 160).
- Furtak, T., M. Kiyomi, T. Uno e M. Buro (2005). “Generalized amazons is Pspace-complete”. Em: *IJCAI’05*, pp. 132–137 (ver p. 78).
- Galliot, F. (2023). “Hypergraphs and the Maker-Breaker game : a structural approach”. Tese de doutoramento. Grenoble Alpes Univ, France (ver pp. 59, 62).
- Gardner, M. (1981). “Mathematical Games”. Em: *Scientific American* 244.4, pp. 18–26 (ver pp. 4, 84, 120).
- Garey, M. R. e D. S. Johnson (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. New York: W. H. Freeman & Co., pp. x+340 (ver pp. 201–203).
- (1990). *Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness*. New York, NY, USA: W. H. Freeman & Co. (ver p. 76).
- Gebauer, H. e T. Szabó (2009). “Asymptotic random graph intuition for the biased connectivity game”. Em: *Random Struct Algor.* 35.4, pp. 431–443 (ver p. 68).
- Giroire, F., I. Lamprou, D. Mazauric, N. Nisse, S. Pérennes e R. Soares (2015). “Connected surveillance game”. Em: *Theor. Comput. Sci.* 584, pp. 131–143 (ver p. 160).
- Gledel, V. (2019). “Vertex covering under constraints”. Tese de doutoramento. University of Lyon, France (ver pp. 64, 65).
- Gledel, V. e N. Oijid (2023). “Avoidance games are Pspace-Complete”. Em: *STACS-2023*. Vol. 254. LIPIcs, 34:1–34:19 (ver p. 70).
- Goldstein, A. S. e E. M. Reingold (1995). “The Complexity of Pursuit on a Graph.” Em: *Theor. Comput. Sci.* 143.1, pp. 93–112 (ver pp. 89, 149).
- Golomb, S. e A. W. Hales (2002). “Hypercube tic-tac-toe”. Em: *More Games of No Chance, MSRI Publications*. Cambridge University Press, pp. 167–182 (ver p. 41).

- Gowers, W. T. (2001). “A new proof of Szemerédi’s theorem”. Em: *Geometric and Functional Analysis* 11, pp. 465–588 (ver p. 43).
- Grundy, P. M. (1939). “Mathematics and games”. Em: *Eureka* 2, pp. 6–8 (ver pp. 4, 21, 24, 25).
- Gruslys, V. e A. M  roueh (2015). “Catching a mouse on a tree”. Em: *arXiv preprint* (ver p. 161).
- Guy, R. K. e C. A. B. Smith (1956). “The G-values of various games”. Em: *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* 52.3, pp. 514–526 (ver pp. 28, 29).
- Hahn, G. (2007). “Cops, robbers, and graphs”. Em: *Tatra Mt. Math. Publ.* 36, pp. 163–176 (ver p. 145).
- Hahn, G., F. Laviolette, N. Sauer e R. E. Woodrow (2002). “On cop-win graphs.” Em: *Discrete Mathematics* 258.1-3, pp. 27–41 (ver p. 159).
- Hahn, G. e G. MacGillivray (2006). “A note on k -cop, l -robber games on graphs.” Em: *Discrete Math.* 306, pp. 2492–2497 (ver pp. 88, 149).
- Hales, A. W. e R. I. Jewett (1963). “Regularity and Positional Games”. Em: *Trans. Am. Math. Soc.* 106.2, pp. 222–229 (ver pp. 5, 32, 39, 40, 49, 55, 56).
- Hamidoune, Y. O. (1987). “On a pursuit game on Cayley digraphs”. Em: *European J. Combin.* 8, pp. 289–295 (ver p. 156).
- Harary, F. (1984). “Convexity in Graphs: Achievement and Avoidance Games”. Em: *Convexity and Graph Theory*. Vol. 87. North-Holland, p. 323 (ver pp. 83, 99, 101).
- Harary, F. e J. Nieminen (1981). “Convexity in graphs”. Em: *Journal of Differential Geometry* 16.1, pp. 185–190 (ver p. 99).
- Harary, F. e S. Hedetniemi (1970). “The achromatic number of a graph”. Em: *Journal of Combinatorial Theory* 8.2, pp. 154–161 (ver p. 120).
- Hartmanis, J. e R. E. Stearns (1965). “On the Computational Complexity of Algorithms”. Em: *Trans. Am. Math. Soc.* 117, pp. 285–306 (ver p. 74).
- Havet, F. e X. Zhu (2013). “The game Grundy number of graphs”. Em: *Journal of Combinatorial Optimization* 25.4, pp. 752–765 (ver p. 130).
- Haynes, T. W., M. A. Henning e C. Tiller (2003). “Geodetic achievement and avoidance games for graphs”. Em: *Quaestiones Mathematicae* 26, pp. 389–397 (ver p. 99).
- Hayward, R. B. e B. Toft (2019). *Hex: The Full Story*. CRC Press (ver p. 18).
- Hearn, R. e E. Demaine (2009). *Games, Puzzles and Computation*. A. K. Peters Ltd, pp. ix+237 (ver p. 74).

- Hefetz, D., M. Krivelevich, M. Stojaković e T. Szabó (2014). *Positional games*. Vol. 44. Springer (ver pp. vii, 50, 66, 67).
- Hindman, N. e E. Tressler (2014). “The First Nontrivial Hales-Jewett Number is Four”. Em: *Ars Combinatoria* 113, pp. 385–390 (ver p. 40).
- Holyer, I. (1981). “The NP-Completeness of Edge-Coloring”. Em: *SIAM Journal on Computing* 10.4, pp. 718–720 (ver p. 120).
- Hopcroft, J. E. e M. S. Krishnamoorthy (1983). “On the Harmonious Coloring of Graphs”. Em: *SIAM J. Algebraic Discrete Methods* 4.3, pp. 306–311 (ver p. 120).
- Irving, R. W. e D. F. Manlove (1999). “The b-chromatic number of a graph”. Em: *Discret. Appl. Math.* 91.1, pp. 127–141 (ver p. 120).
- Islar, V., S. Kannan e S. Khanna (2006). “Randomized Pursuit-Evasion with Local Visibility”. Em: *SIAM J. Discrete Math.* 20.1, pp. 26–41 (ver p. 148).
- Johnson, D. S. (1983). “The NP-Completeness Column: An Ongoing Guide”. Em: *J. Algorithms* 4.4, pp. 397–411 (ver p. 149).
- Joret, G., M. Kaminski e D. O. Theis (2010). “The Cops and Robber game on graphs with forbidden (induced) subgraphs”. Em: *Contributions to Discrete Mathematics* 5.2 (ver p. 156).
- Karp, R. (1972). “Reducibility among combinatorial problems”. Em: *Complexity of Computer Computations*. Ed. por R. E. Miller e J. W. Thatcher. Plenum, New York, pp. 85–103 (ver p. 5).
- Kaul, H. e J. A. Mudrock (2019). “List Coloring a Cartesian Product with a Complete Bipartite Factor”. Em: *Graphs and Combinatorics* 35.6, pp. 1571–1583 (ver p. 120).
- Kierstead, H. A. e W. T. Trotter (1994). “Planar graph coloring with an uncooperative partner”. Em: *Journal of Graph Theory* 18.6, pp. 569–584 (ver pp. 122, 130).
- Kinnersley, W. B. (2015). “Cops and Robbers is EXPTIME-complete”. Em: *J. Comb. Theory B* 111, pp. 201–220 (ver pp. 78, 150).
- Kinnersley, W. B., D. B. West e R. Zamani (2013). “Extremal Problems for Game Domination Number”. Em: *SIAM J. Discrete Math.* 27.4, pp. 2090–2107 (ver pp. 135, 137, 138).
- Klavžar, S., Neethu P. K. e U. Chandran S. V. (2022). “The general position achievement game played on graphs”. Em: *Discret. Appl. Math.* 317, pp. 109–116 (ver p. 112).

- Knuth, D. E. (1974). *Surreal Numbers: How Two Ex-students Turned on to Pure Mathematics and Found Total Happiness: a Mathematical No-vellette*. Addison-Wesley Publishing Company (ver p. 4).
- Komlós, J. e E. Szemerédi (1983). “Limit distribution for the existence of hamiltonian cycles in a random graph”. Em: *Discret. Math.* 43.1, pp. 55–63 (ver p. 69).
- Košmrlj, G. (2017). “Domination game on paths and cycles”. Em: *Ars Mathematica Contemporanea* 13.1, pp. 125–136 (ver p. 137).
- Kosowski, A., B. Li, N. Nisse e K. Suchan (2014). “k-Chordal Graphs: From Cops and Robber to Compact Routing via Treewidth”. Em: *Algorithmica* (ver p. 156).
- Kouril, M. e J. L. Paul (2008). “The van der Waerden Number $W(2, 6)$ Is 1132”. Em: *Experimental Mathematics* 17.1, pp. 53–61 (ver p. 41).
- Krawczyk, T. e B. Walczak (2015). “Asymmetric Coloring Games on Incomparability Graphs”. Em: *Electronic Notes Discrete Mathematics* 49. Eurocomb, pp. 803–811 (ver p. 130).
- Krivelevich, M. (2011). “The critical bias for the Hamiltonicity game is $(1+o(1))n/\ln n$ ”. Em: *J. Am. Math. Soc.* 24.1, pp. 125–131 (ver p. 69).
- Kronenberg, G., A. Mond e A. Naor (2023). “ $\mathcal{H}$ -Games Played on Vertex Sets of Random Graphs”. Em: *SIAM J. Discret. Math.* 37.2, pp. 864–916 (ver pp. 69, 70).
- Kumar, P. e C. Madhavan (1998). “Minimal vertex separators of chordal graphs”. Em: *Discret. Appl. Math.* 89.1, pp. 155–168 (ver p. 199).
- Larsson, U., R. J. Nowakowski e C. P. dos Santos (2018). “Games with guaranteed scores and waiting moves”. Em: *Int. J. Game Theory* 47.2, pp. 653–671 (ver p. 66).
- Larsson, U., R. J. Nowakowski, J. P. Neto e C. P. dos Santos (2016). “Guaranteed Scoring Games”. Em: *Electron. J. Comb.* 23.3, p. 3 (ver p. 66).
- Lasker, E. (1931). *Brettspiele der Völker : [Rätsel und mathematische Spiele]*. Scherl, Berlin. DOI: [10.48664/ums.book-2022-16](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:5:1-63888-p0071-9) (ver p. 21).
- Lavrov, M. (2016). “An Upper Bound for the Hales–Jewett Number $HJ(4, 2)$ ”. Em: *SIAM J. Discrete Math.* 30.2, pp. 1333–1342 (ver p. 40).
- Le, V. B. e J. Spinrad (2004). “Consequences of an algorithm for bridged graphs”. Em: *Discrete Mathematics* 280.1-3, pp. 271–274 (ver p. 148).
- Lehman, A. (1964). “A Solution of the Shannon Switching Game”. Em: *SIAM Journal on Applied Mathematics* 12.4, pp. 687–725 (ver p. 61).

- Lehner, F. (2021). “On the cop number of toroidal graphs”. Em: *J. Comb. Theory B* 151, pp. 250–262 (ver p. 155).
- Lichtenstein, D. e M. Sipser (1980). “Go is polynomial-space hard”. Em: *J. ACM* 27.2, pp. 393–401 (ver p. 78).
- Lima, C. V., T. Marcilon, N. A. Martins e R. M. Sampaio (2022). “Pspace-hardness of variants of the graph coloring game”. Em: *Theor. Comput. Sci.* 909, pp. 87–96 (ver pp. 86, 131).
- (2023). “The connected greedy coloring game”. Em: *Theor. Comput. Sci.* 940, pp. 1–13 (ver p. 131).
- Linhares Sales, C., N. A. Martins, N. Nisse e R. M. Sampaio (2026). “The Harmonious Coloring Game”. Em: *Inf. Process. Lett.* 192, p. 106609 (ver p. 131).
- Lipton, R. J. e R. Tarjan (1980). “Applications of a Planar Separator Theorem”. Em: *SIAM J. Comput.* 9.3, pp. 615–627 (ver p. 154).
- Loyd, S. (1914). *Sam Loyd’s Cyclopedia of 5000 Puzzles Tricks and Conundrums with Answers*. The Lamb Pub. Co., p. 384 (ver p. 3).
- Lu, L. e X. Peng (2012). “On Meyniel’s conjecture of the cop number”. Em: *Journal of Graph Theory* 71.2, pp. 192–205 (ver pp. 152, 156, 159).
- Lu, X. (1991). “A matching game”. Em: *Discrete Mathematics* 94.3, pp. 199–207 (ver p. 70).
- Luczak, T. e P. Pralat (2010). “Chasing robbers on random graphs: Zigzag theorem”. Em: *Random Struct Algor.* 37.4, pp. 516–524 (ver pp. 157, 158).
- Maamoun, M. e H. Meyniel (1987). “On a game of policemen and robber”. Em: *Discrete Appl. Math.* 17, pp. 307–309 (ver p. 156).
- Mamino, M. (2013). “On the computational complexity of a game of cops and robbers”. Em: *Theor. Comput. Sci.* 477, pp. 48–56 (ver pp. 78, 150).
- Mehrabian, A. (2011). “Lower Bounds for the Cop Number when the Robber is Fast”. Em: *Comb. Probab. Comput.* 20.4, pp. 617–621 (ver p. 160).
- Micek, P. e B. Walczak (2011). “A Graph-Grabbing Game”. Em: *Comb. Probab. Comput.* 20.4, pp. 623–629 (ver p. 66).
- Milnor, J. (1953). “Sums of Positional Games”. Em: *Contributions to the Theory of Games, Volume II*. Princeton University Press, pp. 291–302 (ver p. 66).
- Nakprasit, K. M. e K. Nakprasit (2018). “The Game Coloring Number of Planar Graphs with a Specific Girth”. Em: *Graphs and Combinatorics* 34.2, pp. 349–354 (ver p. 122).

- Nash, J. (1953). “Two-Person Cooperative Games”. Em: *Econometrica* 21.1, pp. 128–140 (ver p. 5).
- Nečásková, M. (1988). “A note on the achievement geodetic games”. Em: *Quaestiones Mathematicae* 12, pp. 115–119 (ver p. 99).
- Nenadov, R., A. Steger e M. Stojaković (2016). “On the threshold for the Maker-Breaker H-game”. Em: *Random Struct Algor.* 49.3, pp. 558–578 (ver p. 69).
- Neufeld, S. W. e R. J. Nowakowski (1998). “A game of cops and robbers played on products of graphs”. Em: *Discrete Mathematics* 186.1-3, pp. 253–268 (ver p. 156).
- Nisse, N. (2019). “Network Decontamination”. Em: *Distributed Computing by Mobile Entities*. Vol. 11340. Lect. Notes Comput. Sci. Pp. 516–548 (ver p. 160).
- Nowakowski, R. J. e P. Winkler (1983). “Vertex-to-Vertex Pursuit in a Graph.” Em: *Discrete Mathematics* 43, pp. 235–239 (ver pp. 78, 145, 147).
- Oijid, N. (2024). “Complexité des jeux positionnels sur les graphes. (Complexity of positional games on graphs)”. Tese de doutoramento. Claude Bernard University Lyon 1, France (ver pp. 50, 70).
- Papadimitriou, C. H. (2003). “Computational complexity”. Em: *Encyclopedia of Computer Science*. GBR: John Wiley e Sons Ltd., pp. 260–265 (ver p. 76).
- Patashnik, O. (1980). “Qubic: $4 \times 4 \times 4$ Tic-Tac-Toe”. Em: *Mathematics Magazine* 53.4, pp. 202–216 (ver p. 40).
- Pawlewicz, J. e R. B. Hayward (2014). “Scalable Parallel DFPN Search”. Em: *Computers and Games*. Cham: Springer, pp. 138–150 (ver p. 58).
- Phillips, J. e P. Slater (2001). “An introduction to graph competition independence and enclaveless parameters”. Em: *Graph. Theory Notes N.Y.* 41, pp. 37–41 (ver p. 14).
- Pralat, P., J. Verstraëte e N. C. Wormald (2011). “On the threshold for k-regular subgraphs of random graphs”. Em: *Combinatorica* 31.5, pp. 565–581 (ver p. 158).
- Pralat, P. e N. Wormald (2016). “Meyniel’s conjecture holds for random graphs”. Em: *Random Struct Algor.* 48.2, pp. 396–421 (ver p. 158).
- Quilliot, A. (1983). “Problèmes de jeux, de point fixe, de connectivité et de représentation sur des graphes, des ensembles ordonnés et des hyper-

- graphes”. Thèse de doctorat d’état. Université de Paris VI, France (ver pp. 145, 147).
- Quilliot, A. (1985). “A short note about pursuit games played on a graph with a given genus.” Em: *J. Comb. Theory, Ser. B* 38.1, pp. 89–92 (ver p. 154).
- Rahman, M. L. e T. Watson (2023). “6-Uniform Maker-Breaker Game is Pspace-Complete”. Em: *Comb.* 43.3, pp. 595–612 (ver p. 59).
- Reif, J. H. (1979). “Universal Games of Incomplete Information”. Em: *ACM-STOC*. ACM, pp. 288–308 (ver p. 149).
- (1984). “The Complexity of Two-Player Games of Incomplete Information”. Em: *J. Comput. Syst. Sci.* 29.2, pp. 274–301 (ver p. 149).
- Reisch, S. (1981). “Hex ist Pspace-complete”. Em: *Acta Informatica* 15, pp. 167–191 (ver p. 58).
- Robson, J. M. (1983). “The Complexity of Go”. Em: *IFIP-1983*. Ed. por R. E. A. Mason, pp. 413–417 (ver p. 78).
- Rödl, V. e A. Ruciński (1995). “Threshold functions for Ramsey properties”. Em: *J. Am. Math. Soc.* 8.4, pp. 917–942 (ver p. 69).
- S. Tatham, G. T. (s.d.). *Reaching Row 5 in Solitaire Army*. URL: <http://tartarus.org/gareth/maths/stuff/solarmy.pdf> (ver p. 33).
- Sámal, R. e T. Valla (2014). “The guarding game is E-complete”. Em: *Theor. Comput. Sci.* 521, pp. 92–106 (ver p. 160).
- Savitch, W. J. (1970). “Relationships between nondeterministic and deterministic tape complexities”. Em: *J. Comput. Syst. Sci.* 4.2, pp. 177–192 (ver p. 76).
- Schaefer, T. J. (1978). “On the complexity of some two-person perfect-information games”. Em: *J. Comput. Syst. Sci.* 16.2, pp. 185–225 (ver pp. 4, 5, 12, 15, 59, 78, 81, 83, 85, 112, 205).
- Schröder, B. S. W. (2001). “The Copnumber of a Graph is Bounded by $\lfloor \frac{3}{2} \text{genus}(G) \rfloor + 3$ ”. Em: *Categorical perspectives (Kent, OH, 1998), Trends in Mathematics*, pp. 243–263 (ver p. 155).
- Scott, A. e B. Sudakov (2011). “A Bound for the Cops and Robbers Problem”. Em: *SIAM J. Discrete Math.* 25.3, pp. 1438–1442 (ver p. 159).
- Sekiguchi, Y. (2014). “The game coloring number of planar graphs with a given girth”. Em: *Discrete Mathematics* 330, pp. 11–16 (ver p. 122).
- Sidorowicz, E. (2007). “The game chromatic number and the game colouring number of cactuses”. Em: *Inf. Process. Lett.* 102.4, pp. 147–151 (ver pp. 122, 124).

- Siegel, A. N. (2013). *Combinatorial Game Theory*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society (ver pp. 6, 165, 174, 178, 188).
- Simmons, G. J. (2019). “The game of SIM”. Em: *Mathematical Solitaires and Games*. Routledge, pp. 50–50 (ver p. 69).
- (1969). “The game of SIM”. Em: *J. Recreational Mathematics* 2.2, pp. 66–67 (ver pp. 18, 69).
- Sprague, R. (1936). “Über mathematische Kampfspiele”. German. Em: *Tôhoku Math J* 41, pp. 438–444 (ver pp. 4, 21, 24, 25).
- Stockmeyer, L. J. e A. K. Chandra (1979). “Provably Difficult Combinatorial Games”. Em: *SIAM J. Comput.* 8.2, pp. 151–174 (ver pp. 87, 88).
- Stockmeyer, L. J. e A. R. Meyer (1973). “Word Problems Requiring Exponential Time (Preliminary Report)”. Em: *ACM STOC’73*, pp. 1–9 (ver pp. 5, 77, 205).
- Szabó, Z. (1990). “An application of Lovász’ local lemma-A new lower bound for the van der Waerden number”. Em: *Random Struct Algor.* 1.3, pp. 343–360 (ver p. 43).
- Taranchuk, V. e C. Timmons (2024). “Achromatic colorings of polarity graphs”. Em: *Finite Fields Their Appl.* 99, p. 102497 (ver p. 120).
- Theis, D. (2008). *The cops and robber game on series-parallel graphs*. Research Report. arXiv:0712.2908 (ver p. 156).
- Thomassen, C. (1995). “3-List-Coloring Planar Graphs of Girth 5”. Em: *J. Comb. Theory Ser. B* 64.1, pp. 101–107 (ver p. 120).
- Tosić, R. (1988). “On cops and robber game”. Em: *Stud. Sci. Mat. Hungar* 23, pp. 225–229 (ver p. 156).
- Van de Vel, M. L. J. (1993). *Theory of convex structures*. Vol. 50. Elsevier, pp. xv+540 (ver p. 100).
- van der Waerden, B. L. (1927). “Beweis einer Baudetschen Vermutung”. Em: *Nieuw Arch. Wiskunde* 15, pp. 212–216 (ver p. 41).
- Versteegen, L. (2024). “A proof of the 3/5-conjecture in the domination game”. Em: *Eur. J. Comb.* 122, p. 104034 (ver pp. 137, 138).
- Von Neumann, J. (1928). “Zur Theorie der Gesellschaftsspiele”. Em: *Mathematische Annalen* 100, pp. 295–320 (ver p. 9).
- Von Neumann, J. e O. Morgenstern (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press (ver p. 9).

- Wu, J. e X. Zhu (2008). “Lower bounds for the game colouring number of partial k -trees and planar graphs”. Em: *Discrete Mathematics* 308.12, pp. 2637–2642 (ver p. 124).
- Zermelo, E. (1913). “Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels”. Em: *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians*, pp. 501–504 (ver pp. 9, 73, 79).
- Zetters, T. (1980). “Problems dedicated to emory p. starke”. Em: *The American Mathematical Monthly* 87.7, pp. 574–576 (ver p. 53).
- Zhu, X. (1999). “The Game Coloring Number of Planar Graphs”. Em: *J. Comb. Theory Ser. B* 75.2, pp. 245–258 (ver pp. 121, 122, 127).
- (2000). “The game coloring number of pseudo partial k -trees”. Em: *Discrete Mathematics* 215.1, pp. 245–262 (ver pp. 122, 130).
- (2008). “Refined activation strategy for the marking game”. Em: *J. Comb. Theory Ser. B* 98.1, pp. 1–18 (ver pp. 122, 130).

Índice Remissivo

- ABF, 88
- algoritmo
 - VITÓRIA-ALICE, 10, 75
 - VITÓRIA-BOB, 10
- árvore de Jogo, 7
- AVOIDER-AVOIDER, 17, 70
- AVOIDER-FORCER, 17, 70
- classe
 - EXPTIME, 74
 - EXPTIME-completa, 76, 149
 - FPT, 207
 - NP, 74, 201
 - NP-completa, 202
 - PSPACE, 74
 - PSPACE-completa, 76, 128
 - P, 74, 201
 - XP, 206
 - $W[t]$, 207
- clique, 198
- CLIQUE (n, k) , 18, 44, 61
- CLIQUE-FORMING, 12, 83, 110, 205
- coloração, 199
 - jogo conexo, 86, 131
 - jogo guloso, 130
 - jogo harmônico, 131
 - variante normal, 13, 85
- conjectura de Meyniel, 152
- conjunto independente, 198
- convexidade
 - P_3 , 116
 - fecho convexo, 100
 - geodésica, 100, 116
 - jogo CHG, 101, 106, 110
 - jogo CIG, 101, 106
 - jogo CSFG, 83, 114
 - jogo GPG, 112
 - jogo HG, 101, 110
 - jogo IG, 101
 - monofônica, 116
- COPS AND ROBBER, 5, 78, 145
- dominação, 133
 - MAKER-BREAKER, 63
 - jogo, 13, 133
 - variante normal, 139
- DOT-AND-BOXES, 14
- estratégia
 - de empate, 8
 - vencedora, 8
- genus, 154
- GEOGRAFIA, 80

grafo

aleatório $G(n, p)$, 122, 157
 árvore, 106, 123
 bipartido, 198
 cactus, 124
 convexável, 114
 cop-win, 147
 cordal, 199
 de blocos, 107, 108
 distância hereditária, 199
 periplanar, 65, 122, 130, 199
 planar, 154, 199
 ptolemaico, 108, 115, 199
 regular, 197
 split, 131
 árvore, 198

grafo direcionado, 199

DAG, 199

grupo de Conway, 5, 168

HEX, 18, 58

jogo

combinatório, 4, 6
 frio/morno/quente, 188
 imparcial, 4, 14
 infinitesimal, 181
 limitado, 75
 número, 178
 partizan, 5, 14
 posicional, 5, 16
 quase número, 181

Jogo da Conectividade, 61

JOGO DA VELHA n^2 , 7JOGO H , 60

KAYLES, 4, 12, 26, 205

MISÈRE, 12, 120

PARTIZAN, 15, 190

MAKER-BREAKER, 17, 34

MAKER-MAKER, 17

mínimo excludente, 24

Nim, 7

NIM, 4, 8, 22

MISÈRE, 12

PARTIZAN, 15

nimber, 4, 22, 24, 104, 139, 182

número

cop-number $cn(G)$, 148

cromático $\chi(G)$, 120, 199

de clique $\omega(G)$, 198

de dominação $\gamma(G)$, 133

de independência $\alpha(G)$, 198

de Ramsey $R(k)$, 45

de van der Waerden, 41

jogo cromático χ_g , 14, 120

jogo de clique ω_g , 14

jogo de coloração col_g , 124

jogo de convexidade gcn , 114

jogo de dominação γ_g , 133

jogo de independência α_g , 14

jogo de van der Waerden, 42

P.A. (n, k) , 41

PosCNF, 59, 128

posição de jogo, 6

posição geral, 112

profundidade de jogo, 8, 75

QSAT, 5, 77, 205

redução polinomial, 202

roubo de estratégia, 18, 55, 57

SAT, 77, 203

SCORING GAME, 17, 66

SIM, 18

Soldados de Conway, 32

temperatura/termografo, 188

Teorema

3/5, 138

da Simplicidade, 181

de Beck, 36, 38, 44, 46, 67

de Erdős-Selfridge, 34

de Erdős-Szekeres, 45

de Hales-Jewett, 40

de Ramsey, 18, 45

de Sprague-Grundy, 4, 25,
105

de Zermelo, 9, 50, 55, 73, 79

Técnica do Potencial, 32, 67

variante

de objetivo, 11

de otimização, 11

misère, 11

normal, 11

vencer/perder/empatar, 8

vértice

folha, 198

simplicial, 199

WAITER-CLIENT, 17, 70

Índice de Autores

Beck, József, 5, 31, 38, 46, 67
Bodlaender, Hans, 13, 85, 119
Bouton, Charles, 4, 23

Carrol, Lewis, 3, 5
Conway, John H., 5, 32, 165
Cook, Stephen, 5

Demaine, Erik, 75
Dudeney, Henry, 3, 28, 112

Erdős, Paul, 5, 34, 45, 99

Gardner, Martin, 3, 85, 120
Gowers, Timothy, 43
Grundy, Patrick, 4, 25
Guy, Richard, 29

Hales, Alfred, 40
Harary, Frank, 99
Hein, Piet, 5

Jewett, Robert, 40

Karp, Richard, 5
Knuth, Donald, 5

Lasker, Emanuel, 21
Loyd, Sam, 3

Nash, John, 5, 18, 55, 57

Ramsey, Frank, 18, 45

Schaefer, Thomas, 4, 59, 73
Selfridge, John, 34
Sprague, Roland, 4, 25
Stockmeyer, Larry, 5, 77, 88
Szekeres, George, 45

van der Waerden, Bartel, 5, 41
von Neumann, John, 9

Zermelo, Ernst, 9
Zhu, Xuding, 119, 122

Índice de Notações

$\alpha(G)$, 198	HG, 101, 110
$\alpha_g(G)$, 14	IG, 101
CHG, 101, 106, 110	JFC, 83, 110
CIG, 101, 106	mex($\cdot$), 24
C_n , 139, 198	P_n , 139, 198
cn(G), 148	$\chi(G)$, 199
col $_g(G)$, 124	$\chi_g(G)$, 14
CSFG, 114	$R(k)$, 45
$\delta(G)$, 197	$R_g(k)$, 45
$\Delta(G)$, 197	$W(k)$, 41
GPG, 112	$W_g(k)$, 42
$\gamma(G)$, 133	$\omega(G)$, 198
$\gamma_g(G)$, 133, 137	$\omega_g(G)$, 14
gcn(G), 114	xor $\oplus$, 22
$G(n, p)$, 122, 157	

