

Prêmio Elon Lages 2026 (SBM/SBMAC)

Teoria dos Jogos Combinatórios em Grafos

Samuel Araújo, Nicolas Martins,
Nicolas Nisse, Rudini Sampaio

UFRN, Natal, terça, 04-Agosto-2026, 18h30

Minicurso CBM-IMPA-2025

Convite da Profa. Celina Figueiredo (UFRJ) para ministrar um minicurso.

Ideia de reunir os vários aspectos teóricos de Jogos Combinatórios.

Artigos sobre jogos em periódicos:

Nicolas Nisse (13), Rudini Sampaio (11),

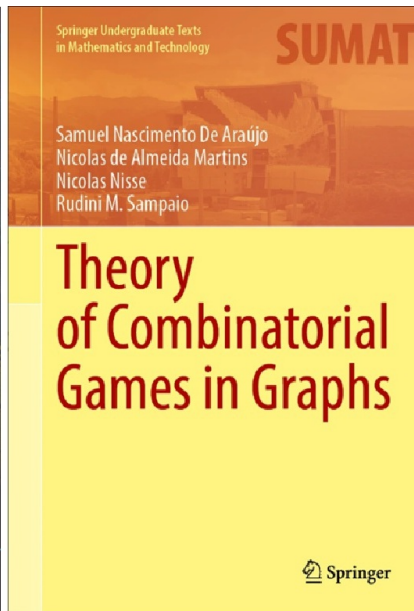
Nicolas Martins (7), Samuel Araújo (2).



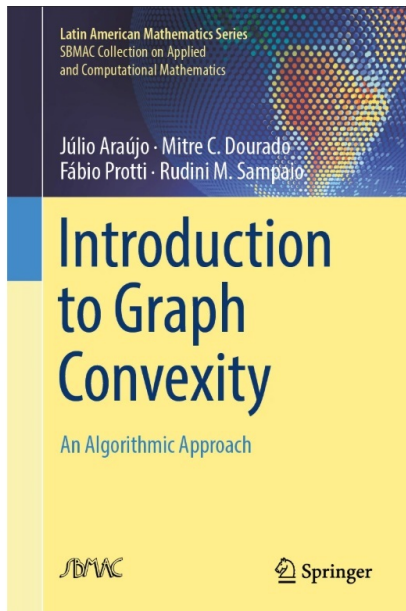
Foto da última aula
(sexta 01/08/2025)

Minicurso introdutório com mais participantes (auditório Ricardo Mañé)

CBM25: Livro em português (IMPA) e inglês (Springer)



CBM23: Livro em português (IMPA) e inglês (Springer)



Primórdios dos Jogos Combinatórios

- ▶ Os jogos fazem parte de todas as culturas e são uma das formas mais antigas de interação social.
- ▶ Jogos do tipo **Mancala** (África, 5000 a.C.)
- ▶ Jogo de **Damas** (Mesopotâmia, 3000 a.C.): **Platão** e **Homero**
- ▶ **Jogo da Velha** (Antigo Egito, 1500 a.C.) e **Go** (China, 500 a.C.)
- ▶ Jogo **Chaturanga** (pai do Xadrez, Índia, 600 d.C.)

“**Matemática Recreativa**”: criação e resolução de quebra-cabeças matemáticos ou *puzzles* (jogos de 1 jogador), entre outros jogos.

- ▶ **Lewis Carrol**: pseudônimo de Charles Dodgson, autor de *Alice no País das Maravilhas* (1865) e *The Game of Logic*,
- ▶ **Sam Loyd** (*Cyclopedia with 5000 puzzles*, 1898),
- ▶ **Henry Dudeney** (*Amusements in Mathematics*, 1917),
- ▶ **Thomas Dawson**: editor da *British Chess Magazine* de 1931 a 1951.
- ▶ **Martin Gardner**: autor da coluna “*Mathematical Games*” da *Scientific American* durante 25 anos, de 1956 a 1981:

“***I just play all the time and I am fortunate enough to get paid for it***”

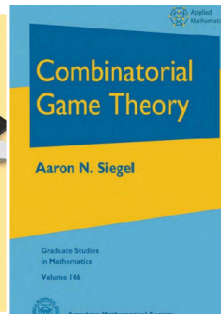
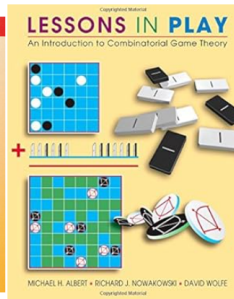
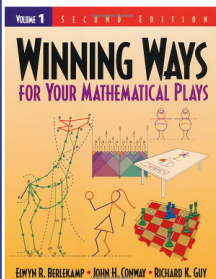
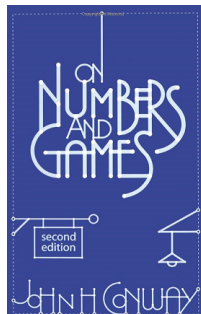
Nim (1901) + Sprague-Grundy (1936) + Conway (1976)

- ▶ **Charles Bouton (1901)**: primeiro estudo teórico completo de um jogo combinatório não trivial: o jogo **Nim**.
- ▶ **Sprague (1936)** e **Grundy (1939)** usaram o jogo **Nim** para representar qualquer **jogo normal imparcial** através de números chamados *nimbers*, dando origem a *Teoria de Sprague-Grundy*.
- ▶ **Conway (1976)** estendeu a Teoria de Sprague-Grundy para qualquer **jogo normal partizan** através de números como os *surreais*, dando origem a *Combinatorial Game Theory*:

I am also interested in wasting time, professionally, and I have invented some very powerful ways of wasting time. One of these is Combinatorial Game Theory

- **Knuth (1969)**: “*Surreal Numbers: How Two Ex-Students Turned on to Pure Mathematics and Found Total Happiness*”.
- **Conway (1976)**: “*On numbers and games*”.
- **Berlekamp, Conway e Guy (1982)**: “*Winning ways for your mathematical plays*”.

Jogo Normal/Misère: Livros - 1976, 1982, 2007 e 2013



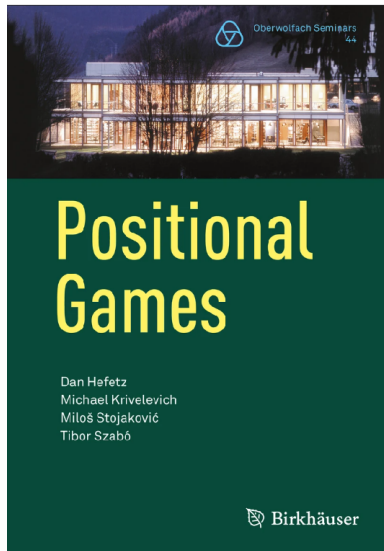
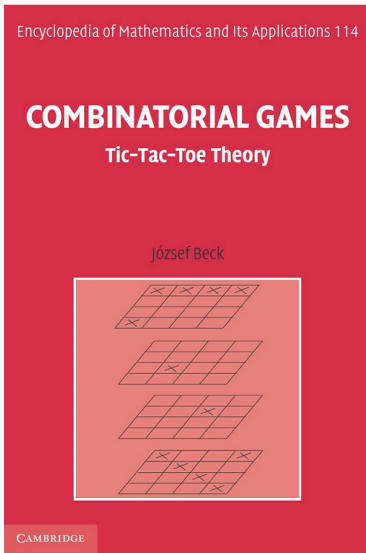
Principalmente para **jogo normal** (imparcial ou partizan), mas também tem um pouco para **jogo misère**.

Jogos Posicionais - Combinatória Extremal - 1970s

- ▶ **Paul Erdős**: um dos matemáticos mais prolíficos da história.
- ▶ Combinatória Extremal para Jogos Posicionais: **MAKER-BREAKER**.
- ▶ Método Probabilístico + Técnica do Potencial
- ▶ Teorema de **Erdős-Selfridge (1973)** para MAKER-BREAKER
- ▶ Teorema de **Erdős-Chvátal (1978)** para MAKER-BREAKER tendencioso
- ▶ Teoremas de **Beck (1981)** para o jogo Clique-Ramsey e o jogo de van der Waerden (ou jogo da progressão aritmética).
- ▶ Teoremas de **Beck (2002)** para MAKER-BREAKER tendencioso

Exemplo: O Jogo **Clique** (n, k) é difícil para valores “pequenos” de n . Mas para $n = 2^{(33+10^{10})}$, sabe-se que Alice vence se e só se $k \leq 2 \cdot 10^{10} - 1$. Ou seja, Alice não consegue colorir as arestas de uma clique com 20 bilhões de vértices, mas consegue com qualquer número menor. É surpreendente que esse problema seja tão difícil para instâncias pequenas, mas é possível calcular o valor exato para instâncias tão grandes.

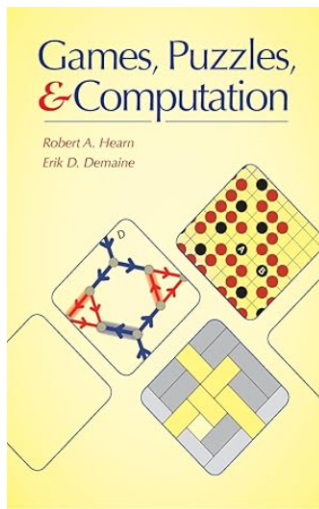
Livros sobre Jogos Posicionais: 2008 e 2014



Complexidade Computacional de Jogos - 1970s

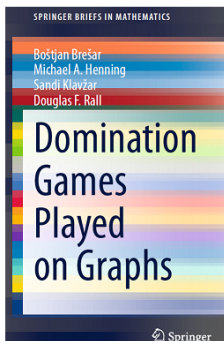
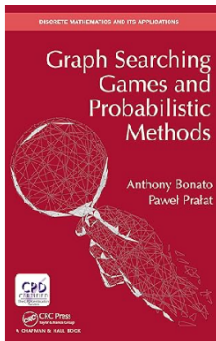
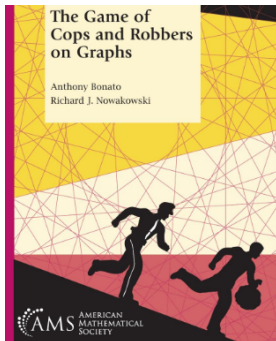
- ▶ Cook-Levin (1971): **SAT** é NP-completo.
- ▶ **SAT**: $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})$
- ▶ Karp (1972): Vários problemas NP-completos em grafos (**Clique**,...)
- ▶ Stockmeyer-Meyer (1973): 1º jogo PSPACE-completo: **QSAT**.
- ▶ **QSAT** (ou **TQBF**): $\exists x_1 \forall x_2 : (x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})$
 $\exists x_0 \forall x_1 \exists x_2 : (x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})$
- ▶ Even-Tarjan (1976) e Schafer (1976): Vários jogos em grafos são PSPACE-completos, como **Kayles**
- ▶ **PosCNF**: $(x_1 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_4)$
- ▶ Stockmeyer-Chandra (1979): 1º jogo EXPTIME-completo: **ASAT** (*Alternating SAT game*).
- ▶ **ASAT**: $(x_{A1} \vee x_{B1} \vee x_{A2} \vee x_{B2}) \wedge$
 $(x_{A1} \vee x_{B1} \vee \overline{x_{A2}} \vee \overline{x_{B2}}) \wedge$
 $(\overline{x_{A1}} \vee \overline{x_{B1}} \vee x_{A2} \vee x_{B2}) \wedge$
 $(\overline{x_{A1}} \vee \overline{x_{B1}} \vee \overline{x_{A2}} \vee \overline{x_{B2}})$

Livros sobre Complexidade de Jogos: 2009



Jogos Combinatórios em Grafos

- ▶ Jogos de Coloração em Grafos (1981)
- ▶ Jogos de Convexidade em Grafos (1984)
- ▶ Jogos de Perseguição em Grafos: Cops and Robber (1984, 2011)
- ▶ Jogos de Busca em Grafos (2017)
- ▶ Jogos de Dominação em Grafos (2010, 2021)



Desse resumo, vemos que a área de Jogos não é brincadeira !!

O que é um Jogo Combinatório?

Mas: O que é um Jogo Combinatório?

Poker, Ludo, Gamão, War ou o Dilema dos Prisioneiros
são jogos combinatórios?

Definição de Jogo Combinatório

Posição de jogo: estado do jogo, incluindo quem é o próximo a jogar.

Jogo Combinatório:

- ▶ **2 jogadores:** geralmente **Alice** (1º jogador) e **Bob** (2º jogador);
- ▶ **Sequencial:** jogadores se alternam em turnos;
- ▶ **Finito:** há um número finito de posições e há alguma regra limitando o número de repetições possíveis de cada posição;
- ▶ **Informação completa (ou perfeita):** em cada momento, todos os jogadores conhecem todas as informações referentes ao jogo;
- ▶ **Sem aleatoriedade:** por exemplo, sem lançamento de dados;
- ▶ **Resultado:** vitória, derrota ou empate.
- ▶ **Regras razoáveis:** cada jogador pode determinar rapidamente (tempo polinomial no tamanho da posição) os movimentos possíveis, as posições obtidas com cada movimento e se a posição atingiu as condições de término do jogo e, nesse caso, qual o resultado.

Teoria Econômica dos Jogos permite jogos com informação incompleta e resultados diferentes (como o Dilema dos Prisioneiros).

Árvore de Jogo (game tree)

Grafo direcionado sobre as posições do jogo, finito e sem ciclos.

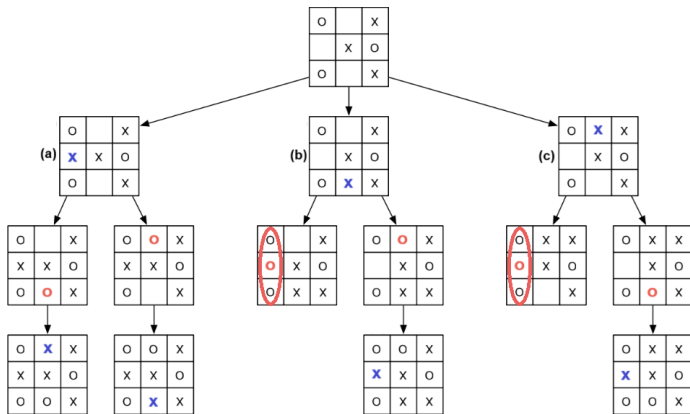
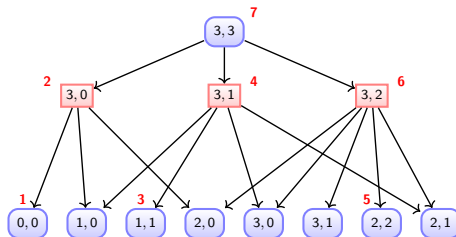
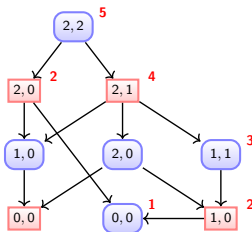


Figure: Árvore de Jogo a partir de uma posição de TIC-TAC-TOE. Note que Alice empata jogando em (a), mas perde jogando em (b) ou (c).

Árvore de Jogo (game tree) - Nim normal

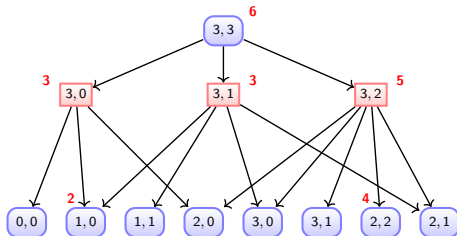
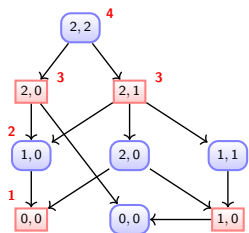
Jogo Nim (normal): k pilhas de objetos em que a pilha i contém n_i objetos. Em cada turno, o jogador escolhe uma pilha e remove qualquer quantidade de objetos de lá. Perde o jogador que não conseguir fazer uma jogada em seu turno, ou seja, todas as pilhas estão vazias. Uma posição de NIM pode ser definida por $(n_1, \dots, n_k)$ e, por simetria, podemos assumir que $n_1 \geq \dots \geq n_k$.



Exercício 1.1: Prove que Bob vence Nim em posições (n, n) .

Árvore de Jogo (*game tree*) - Nim misère

Jogo Nim-misère: Semelhante a **Nim**, mas vence o jogador que não conseguir fazer uma jogada em seu turno.



Exercício 1.2: Prove que Bob vence **Nim-misère** em posições (n, n) se e só se $n \geq 2$.

Raiz (posição inicial), **Folhas** (posições finais)

Profundidade do jogo: altura da árvore, diâmetro do grafo direcionado (maior distância da raiz para alguma folha).

Estratégia Vencedora e o Teorema de Zermelo

Estratégia vencedora para um jogador: função que determina um movimento para cada posição possível em que o jogador é o próximo a jogar tal que, jogando conforme a função a partir da posição inicial, sempre resultará em uma posição vencedora para o jogador, independente dos movimentos do adversário.

Estratégia de empate: análogo.

Dizemos que um jogador **vence** (resp. **empata**) se possui estratégia vencedora (resp. de empate). Senão, dizemos que o jogador **perde**.

Teorema de Zermelo (1913): Em todo jogo combinatório, um jogador tem estratégia vencedora, ou ambos tem estratégia de empate.

Isso não ocorre no jogo trivialíssimo com 3 jogadores X, Y e Z e apenas uma jogada: X escolhe o vencedor entre Y e Z.

Problema de decisão do jogo: Alice (1º jogador) vence?

Algoritmo para ver se Alice vence

► Algoritmo Vitória-Alice:

1. Marque com rótulo 1 as folhas vencedoras para Alice
2. $T \leftarrow 1$; nova $\leftarrow$ **true**
3. **enquanto** (nova) **faça**
4. $T \leftarrow T + 1$; nova $\leftarrow$ **false**
5. **para cada** posição P_A não marcada de Alice:
6. **se** (P_A leva a uma posição marcada) **então**
7. Marque P_A com rótulo T ; nova $\leftarrow$ **true**
8. $T \leftarrow T + 1$
9. **para cada** posição P_B não marcada de Bob:
10. **se** (P_B leva somente a posições marcadas) **então**
11. Marque P_B com rótulo T ; nova $\leftarrow$ **true**
12. **se** (a raiz está marcada) **então**
13. “Alice tem estratégia vencedora”
14. **senão** “Alice não tem estratégia vencedora”

Algoritmos Vitória-Alice, Vitória-Bob, Empate-Alice, Empate-Bob.

Tempo polinomial no número de posições do jogo.

Exemplo: Jogo Nim com k pilhas: Tempo $O(n^k)$.

Classificação de Jogos Combinatórios

Classificação quanto às Jogadas:

- ▶ **Jogo Imparcial:** Em qualquer posição, as jogadas possíveis não dependem do jogador. Ou seja, se duas posições diferem apenas no jogador atual (a fazer a próxima jogada), então as jogadas possíveis são as mesmas. **Nim, Nim-misère**
- ▶ **Jogo Partizan:** jogo não imparcial. **Jogo da Velha, Nim-partizan**

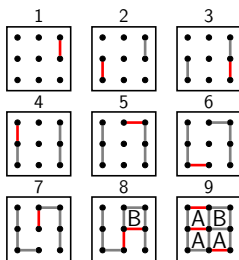
Classificação quanto ao Critério de Vitória:

- ▶ **Variante Normal:** O último a jogar vence. **Nim.**
- ▶ **Variante Misère:** O último a jogar perde. **Nim-misère.**
- ▶ **Jogo de Objetivo:** cada jogador possui um objetivo (um tipo de posição a se alcançar ou se evitar). **Jogo da Velha.**
- ▶ **Jogo de Otimização:** acrescenta-se um número k à instância do jogo de modo que um jogador deseja que certo parâmetro do jogo seja limitado por k (superiormente ou inferiormente, dependendo do jogo) **no fim do jogo** e o outro deseja impedir. **Clique**

Dot-and-Boxes: um jogo imparcial de objetivo

Muito popular antigamente: Timbiriche ou jogo dos pontinhos (em português).

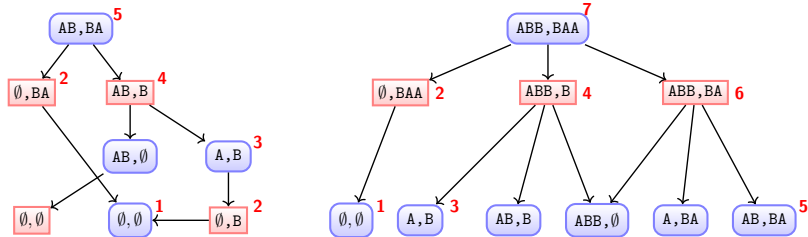
Os jogadores marcam linhas horizontais ou verticais entre pontos vizinhos (dist. 1) numa grade $n \times n$. Quando um jogador fecha um quadrado 1×1 , marca a inicial de seu nome no quadrado e ganha um ponto e mais um turno. No final, vence quem tiver mais pontos. O “objetivo” de cada jogador é atingir uma posição final com mais quadrados marcados com sua inicial.



Note que Alice vence por 3×1 nesse exemplo. As arestas vermelhas são as escolhidas no turno corrente.

Exemplo de jogo partizan: Nim-partizan

Jogo Nim-partizan (normal ou misère): os objetos das pilhas são rotulados com A, B ou C e, em cada turno, Alice (resp. Bob) só pode remover um objeto rotulado com A ou C (resp. B ou C), juntamente com todos os objetos que estão acima dele.



(ABB, BAA): a primeira pilha contém objetos rotulados A, B e B (de baixo para cima) e a segunda pilha B, A e A.

Variantes partizan de jogos imparciais

Kayles-partizan: Os vértices do grafo já vem rotulados com A, B ou C. Alice só pode selecionar vértices A ou C, e Bob só pode selecionar vértices B ou C.

Dot-and-Boxes-partizan: cada aresta selecionada é desenhada com a cor do jogador. Vence o jogador com mais quadrados 1x1 com todas as arestas na sua cor.

Dois tipos comuns de jogos partizan:

(1) os elementos do jogo já vem coloridos e os jogadores só podem jogar em objetos com certo conjunto de cores, que é diferente do conjunto de cores do oponente. **Nim-partizan**

(2) os jogadores colorem com sua cor os elementos jogados e o resultado do jogo depende das cores. **Jogo da Velha.**

Jogos Posicionais

Jogos posicionais são jogos de objetivo em que há um conjunto universo $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ (**elementos do tabuleiro**) e uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de U , chamados de **conjuntos críticos**. Dependendo da variante, são chamados de conjuntos **vencedores** ou **perdedores**.

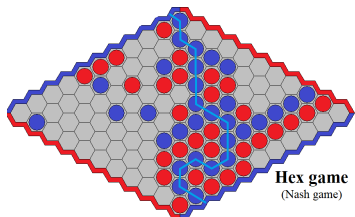
Variantes principais de jogos posicionais:

- ▶ **Maker-Maker**: vence o primeiro a obter um conjunto vencedor.
- ▶ **Maker-Breaker**: Alice vence se conseguir um conjunto vencedor; caso contrário, Bob vence.
- ▶ **Avoider-Forcer**: Alice vence se conseguir evitar um conjunto perdedor; caso contrário, Bob vence.
- ▶ **Avoider-Avoider**: perde o primeiro a obter um conjunto perdedor.
- ▶ **Waiter-Client**: Similar ao **MAKER-MAKER**, mas, em cada turno, Alice pega 2 elementos, Bob escolhe um e Alice o outro.
- ▶ **Scoring Game** (pontuação): no fim do jogo, vence quem tiver o conjunto vencedor com mais pontos, onde a pontuação de cada conjunto vencedor é dada na instância.

Exemplo MAKER-MAKER: Jogo da Velha. Tabuleiro: casas do quadrado 3×3
Conjuntos vencedores: 3 linhas, 3 colunas e 2 diagonais.

Hex: um jogo posicional MAKER-BREAKER

Sabe-se que Alice nunca perde jogos MAKER-MAKER e que não há empate em jogos MAKER-BREAKER (roubo de estratégia).



Exemplo: jogo Hex: É um jogo MAKER-BREAKER com tabuleiro de células hexagonais. Alice de azul tenta conectar os lados azuis, enquanto Bob tenta impedir de vermelho. O único modo de Bob impedir é conectando os lados vermelhos. Por isso, muitos acham que Hex é MAKER-MAKER. Mas não é. Alice vence jogos MAKER-BREAKER simétricos, como Hex. Mas não se conhece estratégia explícita para tabuleiro $n \times n$ com $n \geq 10$. Padrão é 11×11 .

Clique-Ramsey (Maker-Maker) e Sim (Avoider-Avoider)

Jogos posicionais de **coloração de arestas**. Dados inteiros $n > k > 0$, cada jogador escolhe uma aresta do grafo completo K_n e a colore com sua cor.

- ▶ Jogo **Clique-Ramsey** é **MAKER-MAKER**: vence quem primeiro obter uma clique de tamanho k com sua cor.
- ▶ Jogo **Sim** é **Avoider-Avoider**: perde quem primeiro obter uma clique de tamanho k com sua cor (Simmons, 1969).

A versão mais comuns desse jogo é com $(n, k) = (6, 3)$, em que **não há empate** pelo **número de Ramsey** $R(3) = 6$, onde

$R(k)$ é o menor n tal que qualquer coloração das arestas de K_n com 2 cores gera um K_k (clique de tam. k) monocromático.

Outra possibilidade seria $(n, k) = (18, 4)$ pois $R(4) = 18$.

[Erdős 1947, Erdős-Szekeres 1935]: $\sqrt{2}^k < R(k) < 4^{k-1}$

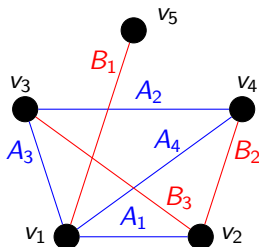
[Campos, Griffiths, Morris, Sahasrabudhe, 2023]: $\sqrt{2}^k < R(k) < 3.995^k$

Jogo MAKER-BREAKER da Clique (n, k)

Jogo posicional de **coloração de arestas**. Cada jogador escolhe uma aresta do grafo completo K_n e a colore com sua cor.

- ▶ Jogo da **Clique** é **MAKER-BREAKER**: Alice vence se conseguir uma clique de tamanho k com sua cor. Caso contrário, Bob vence.

$R_g(k)$: menor n tal que Alice vence. $R_g(k) \leq R(k)$. $R_g(3) = 5$.



Jogo MAKER-BREAKER da Clique (n, k)

Jogo posicional de **coloração de arestas**. Cada jogador escolhe uma aresta do grafo completo K_n e a colore com sua cor.

- ▶ Jogo da **Clique** é **MAKER-BREAKER**: Alice vence se conseguir uma clique de tamanho k com sua cor. Caso contrário, Bob vence.

$R_g(k)$: menor n tal que Alice vence. $R_g(k) \leq R(k)$. $R_g(3) = 5$.

Teorema de Beck (2002): No jogo da CLIQUE (n, k) :

Alice (Maker) vence se

$$k \leq 2 \log_2 n - 2 \log_2 \log_2 n + 2 \log_2 e - 10/3 + o(1).$$

Bob (Breaker) vence se

$$k \geq 2 \log_2 n - 2 \log_2 \log_2 n + 2 \log_2 e - 1 + o(1),$$

onde $o(1)$ é desprezível para $n \geq 2^{10^{10}}$. Assim, $R_g(k) \approx \sqrt{2}^{k \cdot (1+o(1))}$.

Exemplo: Para $n = 2^{(33+10^{10})}$, sabe-se que Alice vence se e só se $k \leq 2 \cdot 10^{10} - 1$. Ou seja, Alice não consegue colorir as arestas de uma clique com 20 bilhões de vértices, mas consegue com qualquer número menor.

Jogo MAKER-BREAKER da P.A. (n, k)

Cada jogador escolhe um inteiro de 1 a n e colore com sua cor.

Alice vence se obter uma P.A. de tam. k com sua cor. Senão, Bob vence.

$W_g(k)$: menor n tal que Alice vence.

$W_g(k) \leq W(k)$, onde $W(k)$ é o **num. de van der Waerden**: menor n tal que toda coloração de 1 a n com duas cores gera uma P.A. de tam. k .

$$W_g(3) = 5 < 9 = W(3)$$

1	2	③	④	⑤
B_1	B_2	A_1	A_2	A_3

1	②	③	④	5
B_1	A_3	A_1	A_2	B_2

1	2	③	④	⑤
B_2	B_1	A_1	A_3	A_2

①	2	③	4	⑤
A_3	B_1	A_1	B_2	A_2

Jogo MAKER-BREAKER da P.A. (n, k)

$W_g(k)$: menor n tal que Alice vence.

$W_g(k) \leq W(k)$, onde $W(k)$ é o **num. de van der Waerden**: menor n tal que toda coloração de 1 a n com duas cores gera uma P.A. de tam. k .

$$W_g(3) = 5 < 9 = W(3) \quad \text{e} \quad W_g(4) = 13 < 35 = W(4)$$

1	2	3	4 B_1	5 B_2	6 A_4	7 A_1	8 A_3	9 A_2	10 B_3	11	12	13
1	2	3	4 B_1	5 B_3	6	7 A_1	8 B_2	9 A_2	10	11 A_3	12	13 A_4
1 B_3	2	3	4 A_3	5 B_1	6	7 A_1	8	9 B_2	10 A_2	11	12	13 A_4
1	2	3	4 B_2	5 B_1	6	7 A_1	8 B_3	9 A_3	10 A_2	11 A_4	12 B_4	13 A_5
1	2	3	4 B_4	5 B_1	6 A_4	7 A_1	8 A_3	9 B_3	10 A_2	11	12 A_5	13 B_2
1 A_4	2	3	4 A_3	5	6 B_1	7 A_1	8	9 B_2	10 A_2	11	12	13 B_3
1	2	3 A_5	4 B_2	5 A_4	6 B_1	7 A_1	8 B_3	9 A_3	10 A_2	11 B_4	12	13

Jogo MAKER-BREAKER da P.A. (n, k)

$W_g(k)$: menor n tal que Alice vence.

$W_g(k) \leq W(k)$, onde $W(k)$ é o **num. de van der Waerden**: menor n tal que toda coloração de 1 a n com duas cores gera uma P.A. de tam. k .

$$W_g(3) = 5 < 9 = W(3) \quad \text{e} \quad W_g(4) = 13 < 35 = W(4)$$

Teorema [Z. Szabó 1990, Gowers 2001] $W(k) > 2^k/k^\varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$ e k suficientemente grande.

$$W(k) < 2^{2^{2^{2^{k+9}}}}$$

Teorema [Beck 1981] $W_g(k) = 2^{k \cdot (1+o(1))}$. Mais especificamente,

$$2^{k \cdot (1-k^{-0.1})} < W_g(k) < 2^k \cdot k^3/8.$$

Jogo da Velha n^d (d -dimensional): Maker-Maker

Teoremas de Hales-Jewett (1963) e Erdős-Selfridge (1973):

- (a) $\forall d, \exists n$: Bob **empata** o Jogo da Velha n^d
- (b) $\forall n, \exists d$: Alice vence o Jogo da Velha n^d

Bob empata os Jogos 3^2 , 8^3 , 14^4 e 20^5 , por exemplo.

Complexidade Computacional para Jogos

Classes **P** e **NP** para problemas de decisão.

A classe **P** está contida em **NP**.

Problema “**P=NP?**”: um dos 7 do Prêmio do Milênio.

Jogos costumam ser mais complicados e precisam de classes mais abrangentes: **PSPACE** e **EXPTIME**.

Provar que certos jogos são **PSPACE-completos** ou **EXPTIME-completos** é um desafio até hoje.

Exemplos:

Jogo da Coloração em Grafos foi introduzido em 1981 e só provado PSPACE-completo em 2020.

Jogo Cops-and-Robber foi introduzido em 1983, foi provado PSPACE-difícil em 2013 e EXPTIME-completo em 2015.

Jogos Combinatórios em Grafos

Jogos de Coloração em Grafos (1981)

Jogos de Polícia e Ladrão em Grafos (1983)

Jogos de Convexidade em Grafos (1984)

Jogos de Dominação em Grafos (2010)

Variantes normal, misère, otimização, Maker-Maker, Maker-Breaker.

Aplicar em classes de grafos: grafos planares, grafos cordais, grafos bipartidos

- ▶ Determinar de forma exata/matemática o vencedor.
- ▶ Obter algoritmos polinomiais para determinar o vencedor.
- ▶ Provar que é PSPACE-difícil ou EXPTIME-difícil.

Jogo Cops-and-Robber (Polícia e Ladrão)

- ▶ **Entrada:** Grafo G , inteiro k ;
- ▶ $\mathcal{C}$ controla os policiais;
- ▶ $\mathcal{R}$ controla o ladrão.

Jogo Cops-and-Robber (Polícia e Ladrão)

- ▶ **Entrada:** Grafo G , inteiro k ;
- ▶ $\mathcal{C}$ controla os policiais;
- ▶ $\mathcal{R}$ controla o ladrão.

Jogo Cops-and-Robber (Polícia e Ladrão)

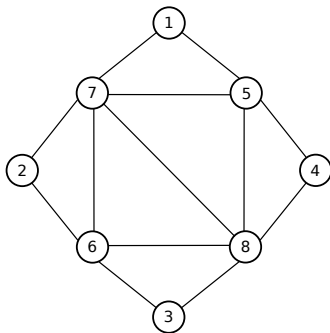
- ▶ **Entrada:** Grafo G , inteiro k ;
- ▶ $\mathcal{C}$ controla os policiais;
- ▶ $\mathcal{R}$ controla o ladrão.

Jogo Cops-and-Robber (Polícia e Ladrão)

- ▶ **Entrada:** Grafo G , inteiro k ;
- ▶ $\mathcal{C}$ controla os policiais;
- ▶ $\mathcal{R}$ controla o ladrão.

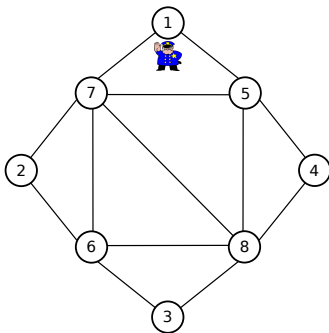
Jogo Cops-and-Robber (Polícia e Ladrão)

- ▶ **Entrada:** Grafo G , inteiro k ;
- ▶ $\mathcal{C}$ controla os policiais;
- ▶ $\mathcal{R}$ controla o ladrão.



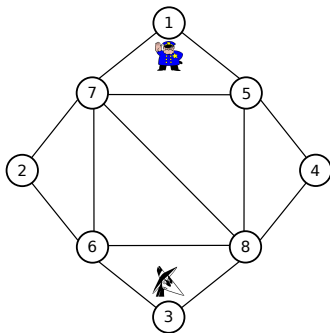
O Jogo de Polícia e Ladrão (Cops-and-Robber)

- ▶ **Entrada:** Grafo G , inteiro k ;
- ▶ $\mathcal{C}$ controla os policiais;
- ▶ $\mathcal{R}$ controla o ladrão.



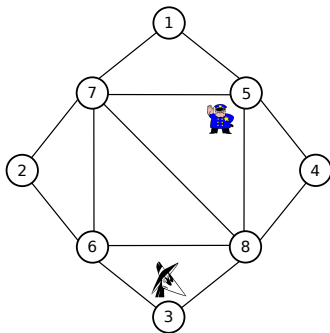
O Jogo de Polícia e Ladrão (Cops-and-Robber)

- ▶ **Entrada:** Grafo G , inteiro k ;
- ▶ $\mathcal{C}$ controla os policiais;
- ▶ $\mathcal{R}$ controla o ladrão.



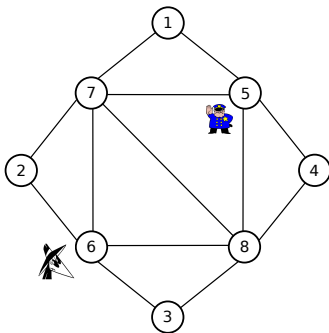
O Jogo de Polícia e Ladrão (Cops-and-Robber)

- ▶ **Entrada:** Grafo G , inteiro k ;
- ▶ $\mathcal{C}$ controla os policiais;
- ▶ $\mathcal{R}$ controla o ladrão.



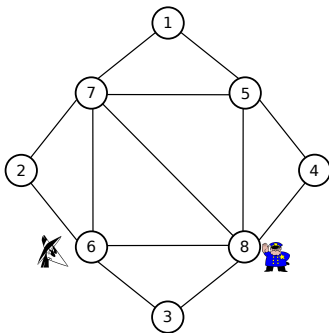
O Jogo de Polícia e Ladrão (Cops-and-Robber)

- ▶ **Entrada:** Grafo G , inteiro k ;
- ▶ $\mathcal{C}$ controla os policiais;
- ▶ $\mathcal{R}$ controla o ladrão.



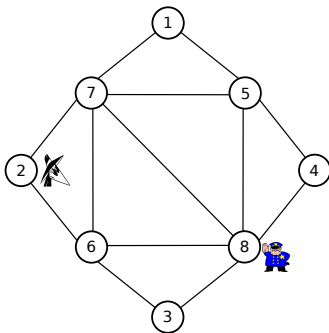
O Jogo de Polícia e Ladrão (Cops-and-Robber)

- ▶ **Entrada:** Grafo G , inteiro k ;
- ▶ $\mathcal{C}$ controla os policiais;
- ▶ $\mathcal{R}$ controla o ladrão.



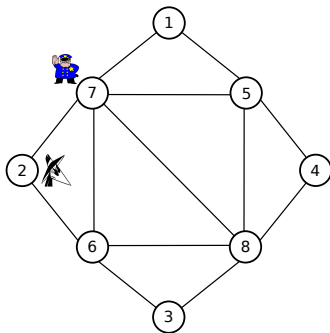
O Jogo de Polícia e Ladrão (Cops-and-Robber)

- ▶ **Entrada:** Grafo G , inteiro k ;
- ▶ $\mathcal{C}$ controla os policiais;
- ▶ $\mathcal{R}$ controla o ladrão.



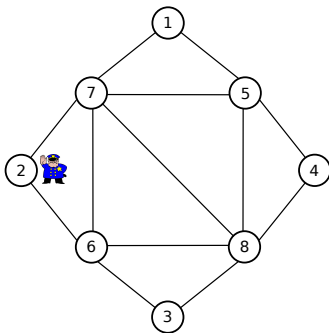
O Jogo de Polícia e Ladrão (Cops-and-Robber)

- ▶ **Entrada:** Grafo G , inteiro k ;
- ▶ $\mathcal{C}$ controla os policiais;
- ▶ $\mathcal{R}$ controla o ladrão.



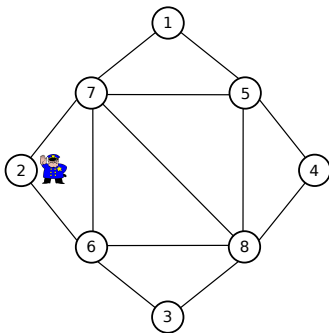
O Jogo de Polícia e Ladrão (Cops-and-Robber)

- ▶ **Entrada:** Grafo G , inteiro k ;
- ▶ $\mathcal{C}$ controla os policiais;
- ▶ $\mathcal{R}$ controla o ladrão.



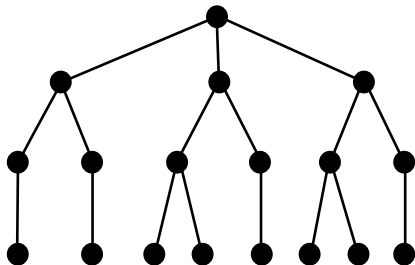
O Jogo de Polícia e Ladrão (Cops-and-Robber)

- ▶ **Entrada:** Grafo G , inteiro k ;
- ▶ $\mathcal{C}$ controla os policiais;
- ▶ $\mathcal{R}$ controla o ladrão.

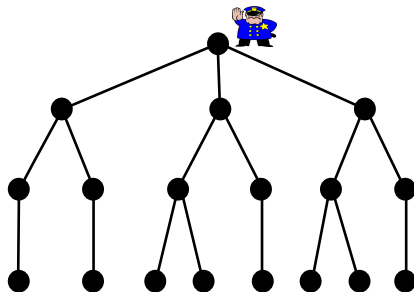


- ▶ $\mathcal{C}$ vence se eventualmente um policial ocupa o mesmo vértice do ladrão. Caso contrário vence $\mathcal{R}$. (Nowakowski e Winkler, 1983) e (Quilliot, 1983)

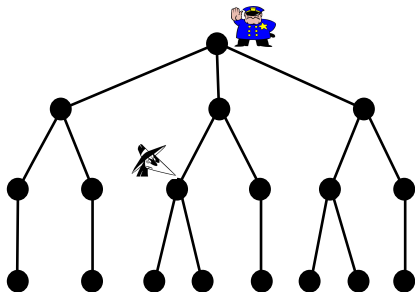
Cops-and-Robber em Árvores



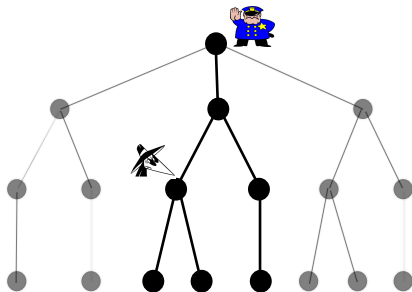
Cops-and-Robber em Árvores



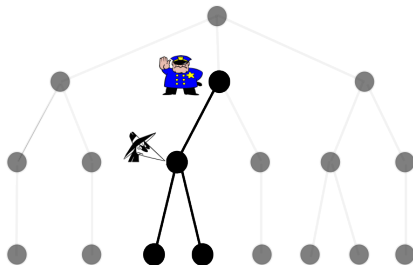
Cops-and-Robber em Árvores



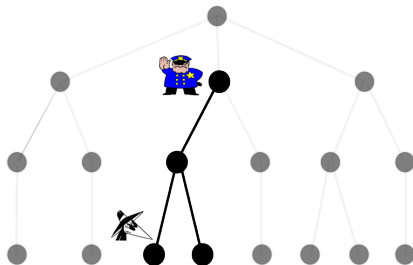
Cops-and-Robber em Árvores



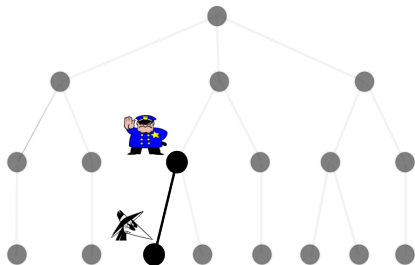
Cops-and-Robber em Árvores



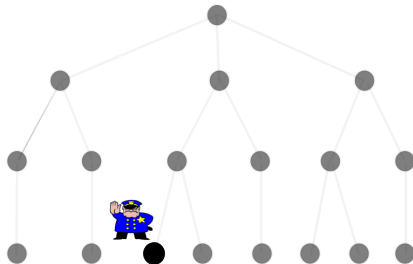
Cops-and-Robber em Árvores



Cops-and-Robber em Árvores



Cops-and-Robber em Árvores



Cops-and-Robber e o Cop-number

- ▶ Certamente se $k = n$, então $\mathcal{C}$ sempre vence;
- ▶ O cop-number de um grafo G , $cn(G)$, é o menor inteiro k tal que $\mathcal{C}$ vence Cops-and-Robber com k policiais em G ;
- ▶ Um grafo G é cop-win se $cn(G) = 1$.
- ▶ G é cop-win se e só se G é desmontável (Quilliot, 1983).
- ▶ Se G é planar, então $cn(G) \leq 3$ (Aigner e Fromme, 1984).
- ▶ Se G tem genus g , então $cn(G) \leq 2g + 3$ (Quilliot, 1985).
- ▶ Se G tem genus g , então $cn(G) \leq 1.5g + 3$ (Schröder, 2001).
- ▶ Se G é toroidal (genus 1), então $cn(G) \leq 3$ (Lehner, 2021).

Conjectura: Se G tem genus g , então $cn(G) \leq g + 3$

Conjectura (Meyniel 1987): $cn(G) = O(\sqrt{n})$, onde n é o num. vértices

Teorema [Bonato et al., 2007]

$$cn(G(n, p)) \approx \log_{1/(1-p)} n$$

Cops-and-Robber e o Cop-number

- ▶ Certamente se $k = n$, então $\mathcal{C}$ sempre vence;
- ▶ O cop-number de um grafo G , $cn(G)$, é o menor inteiro k tal que $\mathcal{C}$ vence Cops-and-Robber com k policiais em G ;
- ▶ Um grafo G é cop-win se $cn(G) = 1$.
- ▶ G é cop-win se e só se G é desmontável (Quilliot, 1983).
- ▶ Se G é planar, então $cn(G) \leq 3$ (Aigner e Fromme, 1984).
- ▶ Se G tem genus g , então $cn(G) \leq 2g + 3$ (Quilliot, 1985).
- ▶ Se G tem genus g , então $cn(G) \leq 1.5g + 3$ (Schröder, 2001).
- ▶ Se G é toroidal (genus 1), então $cn(G) \leq 3$ (Lehner, 2021).

Conjectura: Se G tem genus g , então $cn(G) \leq g + 3$

Conjectura (Meyniel 1987): $cn(G) = O(\sqrt{n})$, onde n é o num. vértices

Teorema [Bonato et al., 2007]

$$cn(G(n, p)) \approx \log_{1/(1-p)} n$$

Cops-and-Robber e o Cop-number

- ▶ Certamente se $k = n$, então $\mathcal{C}$ sempre vence;
- ▶ O cop-number de um grafo G , $cn(G)$, é o menor inteiro k tal que $\mathcal{C}$ vence Cops-and-Robber com k policiais em G ;
- ▶ Um grafo G é cop-win se $cn(G) = 1$.
- ▶ G é cop-win se e só se G é desmontável (Quilliot, 1983).
- ▶ Se G é planar, então $cn(G) \leq 3$ (Aigner e Fromme, 1984).
- ▶ Se G tem genus g , então $cn(G) \leq 2g + 3$ (Quilliot, 1985).
- ▶ Se G tem genus g , então $cn(G) \leq 1.5g + 3$ (Schröder, 2001).
- ▶ Se G é toroidal (genus 1), então $cn(G) \leq 3$ (Lehner, 2021).

Conjectura: Se G tem genus g , então $cn(G) \leq g + 3$

Conjectura (Meyniel 1987): $cn(G) = O(\sqrt{n})$, onde n é o num. vértices

Teorema [Bonato et al., 2007]

$$cn(G(n, p)) \approx \log_{1/(1-p)} n$$

Cops-and-Robber e o Cop-number

- ▶ Certamente se $k = n$, então $\mathcal{C}$ sempre vence;
- ▶ O cop-number de um grafo G , $cn(G)$, é o menor inteiro k tal que $\mathcal{C}$ vence Cops-and-Robber com k policiais em G ;
- ▶ Um grafo G é cop-win se $cn(G) = 1$.
- ▶ G é cop-win se e só se G é desmontável (Quilliot, 1983).
- ▶ Se G é planar, então $cn(G) \leq 3$ (Aigner e Fromme, 1984).
- ▶ Se G tem genus g , então $cn(G) \leq 2g + 3$ (Quilliot, 1985).
- ▶ Se G tem genus g , então $cn(G) \leq 1.5g + 3$ (Schröder, 2001).
- ▶ Se G é toroidal (genus 1), então $cn(G) \leq 3$ (Lehner, 2021).

Conjectura: Se G tem genus g , então $cn(G) \leq g + 3$

Conjectura (Meyniel 1987): $cn(G) = O(\sqrt{n})$, onde n é o num. vértices

Teorema [Bonato et al., 2007]

$$cn(G(n, p)) \approx \log_{1/(1-p)} n$$

Cops-and-Robber e o Cop-number

- ▶ Certamente se $k = n$, então $\mathcal{C}$ sempre vence;
- ▶ O cop-number de um grafo G , $cn(G)$, é o menor inteiro k tal que $\mathcal{C}$ vence Cops-and-Robber com k policiais em G ;
- ▶ Um grafo G é cop-win se $cn(G) = 1$.

- ▶ G é cop-win se e só se G é desmontável (Quilliot, 1983).
- ▶ Se G é planar, então $cn(G) \leq 3$ (Aigner e Fromme, 1984).
- ▶ Se G tem genus g , então $cn(G) \leq 2g + 3$ (Quilliot, 1985).
- ▶ Se G tem genus g , então $cn(G) \leq 1.5g + 3$ (Schröder, 2001).
- ▶ Se G é toroidal (genus 1), então $cn(G) \leq 3$ (Lehner, 2021).

Conjectura: Se G tem genus g , então $cn(G) \leq g + 3$

Conjectura (Meyniel 1987): $cn(G) = O(\sqrt{n})$, onde n é o num. vértices

Teorema [Bonato et al., 2007]

$$cn(G(n, p)) \approx \log_{1/(1-p)} n$$

Cops-and-Robber e o Cop-number

- ▶ Certamente se $k = n$, então $\mathcal{C}$ sempre vence;
 - ▶ O cop-number de um grafo G , $cn(G)$, é o menor inteiro k tal que $\mathcal{C}$ vence Cops-and-Robber com k policiais em G ;
 - ▶ Um grafo G é cop-win se $cn(G) = 1$.
-
- ▶ G é cop-win se e só se G é desmontável (Quilliot, 1983).
 - ▶ Se G é planar, então $cn(G) \leq 3$ (Aigner e Fromme, 1984).
 - ▶ Se G tem genus g , então $cn(G) \leq 2g + 3$ (Quilliot, 1985).
 - ▶ Se G tem genus g , então $cn(G) \leq 1.5g + 3$ (Schröder, 2001).
 - ▶ Se G é toroidal (genus 1), então $cn(G) \leq 3$ (Lehner, 2021).

Conjectura: Se G tem genus g , então $cn(G) \leq g + 3$

Conjectura (Meyniel 1987): $cn(G) = O(\sqrt{n})$, onde n é o num. vértices

Teorema [Bonato et al., 2007]

$$cn(G(n, p)) \approx \log_{1/(1-p)} n$$

Cops-and-Robber e o Cop-number

- ▶ Certamente se $k = n$, então $\mathcal{C}$ sempre vence;
- ▶ O cop-number de um grafo G , $cn(G)$, é o menor inteiro k tal que $\mathcal{C}$ vence Cops-and-Robber com k policiais em G ;
- ▶ Um grafo G é cop-win se $cn(G) = 1$.

- ▶ G é cop-win se e só se G é desmontável (Quilliot, 1983).
- ▶ Se G é planar, então $cn(G) \leq 3$ (Aigner e Fromme, 1984).
- ▶ Se G tem genus g , então $cn(G) \leq 2g + 3$ (Quilliot, 1985).
- ▶ Se G tem genus g , então $cn(G) \leq 1.5g + 3$ (Schröder, 2001).
- ▶ Se G é toroidal (genus 1), então $cn(G) \leq 3$ (Lehner, 2021).

Conjectura: Se G tem genus g , então $cn(G) \leq g + 3$

Conjectura (Meyniel 1987): $cn(G) = O(\sqrt{n})$, onde n é o num. vértices

Teorema [Bonato et al., 2007]

$$cn(G(n, p)) \approx \log_{1/(1-p)} n$$

Cops-and-Robber e o Cop-number

- ▶ Certamente se $k = n$, então $\mathcal{C}$ sempre vence;
- ▶ O cop-number de um grafo G , $cn(G)$, é o menor inteiro k tal que $\mathcal{C}$ vence Cops-and-Robber com k policiais em G ;
- ▶ Um grafo G é cop-win se $cn(G) = 1$.

- ▶ G é cop-win se e só se G é desmontável (Quilliot, 1983).
- ▶ Se G é planar, então $cn(G) \leq 3$ (Aigner e Fromme, 1984).
- ▶ Se G tem genus g , então $cn(G) \leq 2g + 3$ (Quilliot, 1985).
- ▶ Se G tem genus g , então $cn(G) \leq 1.5g + 3$ (Schröder, 2001).
- ▶ Se G é toroidal (genus 1), então $cn(G) \leq 3$ (Lehner, 2021).

Conjectura: Se G tem genus g , então $cn(G) \leq g + 3$

Conjectura (Meyniel 1987): $cn(G) = O(\sqrt{n})$, onde n é o num. vértices

Teorema [Bonato et al., 2007]

$$cn(G(n, p)) \approx \log_{1/(1-p)} n$$

Prêmio Elon Lages 2026. Obrigado, SBM e SBMAC

