

O Jogo da Cobertura de Vértices em Grafos

**Josefran Bastos, Fabrício Benevides, Thiago Marcilon,
Nicolas Martins, Nicolas Nisse, Rudini Sampaio**

Universidade Federal do Ceará (UFC), Brazil
Universidade Federal do Cariri (UFCA), Brazil
Inst. Engen. e Desenv. Sustentável (UNILAB), Brazil
Université Côte d'Azur, Inria, CNRS, I3S, France

ETC-2026, CSBC,
Gramado, quarta, 22-Julho, 8h

Jogo da Cobertura de Vértice: definições

Alice e Bob se alternam escolhendo em cada turno um vértice **jogável**.

A definição de vértice **jogável** depende do jogo em questão.

Jogo da Clique: deve ser adjacente aos vértices selecionados antes.

Jogo de Dominação: deve dominar ao menos um vértice ainda não dominado.

Jogo de Convexidade: deve infectar ao menos um vértice ainda não infectado.

Jogo de Coloração: deve colorir ao menos um vértice ainda não colorido.

Jogo da Cobertura: deve cobrir ao menos uma aresta ainda não coberta.

Variante Normal: perde quem não puder jogar (último a jogar vence).

Variante Misère: vence quem não puder jogar (último a jogar perde).

Variante de Otimização: Alice vence se forem escolhidos $\leq k$ vértices.

Game Clique number $\omega_g(G)$: maior k tal que Alice vence.

Game Domination number $\gamma_g(G)$: menor k tal que Alice vence.

Game Chromatic number $\chi_g(G)$: menor k tal que Alice garante a coloração de todos os vértices de G usando k cores.

Game Vertex Cover number $vc_g(G)$: menor k tal que Alice vence o jogo da Cobertura com no máximo k vértices selecionados.

Jogo da Cobertura de Vértice: definições

Alice e Bob se alternam escolhendo em cada turno um vértice **jogável**.

A definição de vértice **jogável** depende do jogo em questão.

Jogo da Clique: deve ser adjacente aos vértices selecionados antes.

Jogo de Dominação: deve dominar ao menos um vértice ainda não dominado.

Jogo de Convexidade: deve infectar ao menos um vértice ainda não infectado.

Jogo de Coloração: deve colorir ao menos um vértice ainda não colorido.

Jogo da Cobertura: deve cobrir ao menos uma aresta ainda não coberta.

Variante Normal: perde quem não puder jogar (último a jogar vence).

Variante Misère: vence quem não puder jogar (último a jogar perde).

Variante de Otimização: Alice vence se forem escolhidos $\leq k$ vértices.

Game Clique number $\omega_g(G)$: maior k tal que Alice vence.

Game Domination number $\gamma_g(G)$: menor k tal que Alice vence.

Game Chromatic number $\chi_g(G)$: menor k tal que Alice garante a coloração de todos os vértices de G usando k cores.

Game Vertex Cover number $vc_g(G)$: menor k tal que Alice vence o jogo da Cobertura com no máximo k vértices selecionados.

Jogo da Cobertura de Vértice: definições

Alice e Bob se alternam escolhendo em cada turno um vértice **jogável**.

A definição de vértice **jogável** depende do jogo em questão.

Jogo da Clique: deve ser adjacente aos vértices selecionados antes.

Jogo de Dominação: deve dominar ao menos um vértice ainda não dominado.

Jogo de Convexidade: deve infectar ao menos um vértice ainda não infectado.

Jogo de Coloração: deve colorir ao menos um vértice ainda não colorido.

Jogo da Cobertura: deve cobrir ao menos uma aresta ainda não coberta.

Variante Normal: perde quem não puder jogar (último a jogar vence).

Variante Misère: vence quem não puder jogar (último a jogar perde).

Variante de Otimização: Alice vence se forem escolhidos $\leq k$ vértices.

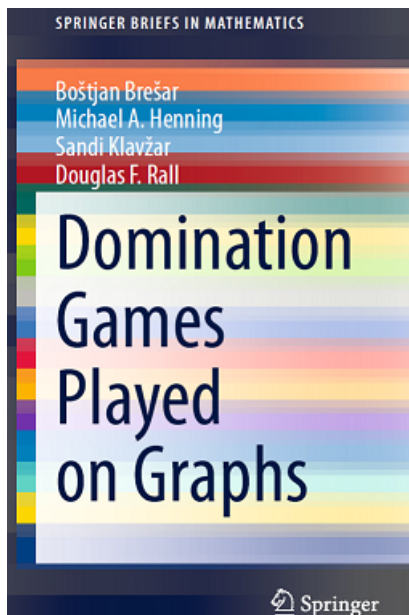
Game Clique number $\omega_g(G)$: maior k tal que Alice vence.

Game Domination number $\gamma_g(G)$: menor k tal que Alice vence.

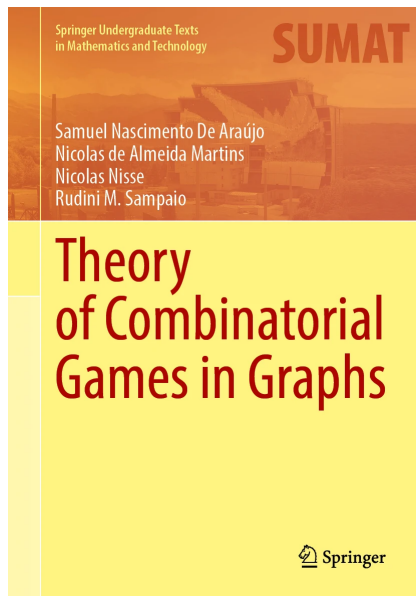
Game Chromatic number $\chi_g(G)$: menor k tal que Alice garante a coloração de todos os vértices de G usando k cores.

Game Vertex Cover number $vc_g(G)$: menor k tal que Alice vence o jogo da Cobertura com no máximo k vértices selecionados.

Jogos de Dominação em Grafos



Jogos em Grafos: Coloração, Clique, Conjuntos Convexos



Resultados da literatura de jogos combinatórios

[Dudeney, 1907]: Introduziu o Jogo Kayles, que levou ao Jogo da Clique

[Schaefer, 1978]: Jogo Normal da Clique é PSPACE-Difícil

[Chandran et al., 2024]: Jogo Misère da Clique é PSPACE-Difícil

[Brosse et al., 2025]: Jogo Optim da Clique é PSPACE-Difícil

[Brams, 1981]: Introduziu o Jogo de Coloração

[Bodlaender, 1991]: Jogo Normal de Coloração é PSPACE-Difícil

[Costa et al., 2019]: Jogo Optim de Coloração é PSPACE-Difícil

[Harary, 1984]: Introduziu os Jogos de Convexidade

[Araujo et al., 2024]: Hull game Normal/Misère é PSPACE-Difícil

[Araujo et al., 2026]: Interval game Optimização é PSPACE-Difícil

[Brešar et al., 2013]: Introduziu o Jogo de Dominação

[Brešar et al., 2016]: Jogo Optimização de Dominação é PSPACE-Difícil

[Brito et al., 2025]: Jogo Normal/Misère Dominação é PSPACE-Difícil

Resultados da literatura de jogos combinatórios

[Dudeney, 1907]: Introduziu o Jogo Kayles, que levou ao Jogo da Clique

[Schaefer, 1978]: Jogo Normal da Clique é PSPACE-Difícil

[Chandran et al., 2024]: Jogo Misère da Clique é PSPACE-Difícil

[Brosse et al., 2025]: Jogo Optim da Clique é PSPACE-Difícil

[Brams, 1981]: Introduziu o Jogo de Coloração

[Bodlaender, 1991]: Jogo Normal de Coloração é PSPACE-Difícil

[Costa et al., 2019]: Jogo Optim de Coloração é PSPACE-Difícil

[Harary, 1984]: Introduziu os Jogos de Convexidade

[Araujo et al., 2024]: Hull game Normal/Misère é PSPACE-Difícil

[Araujo et al., 2026]: Interval game Optimização é PSPACE-Difícil

[Brešar et al., 2013]: Introduziu o Jogo de Dominação

[Brešar et al., 2016]: Jogo Optimização de Dominação é PSPACE-Difícil

[Brito et al., 2025]: Jogo Normal/Misère Dominação é PSPACE-Difícil

Resultados da literatura de jogos combinatórios

[Dudeney, 1907]: Introduziu o Jogo Kayles, que levou ao Jogo da Clique

[Schaefer, 1978]: Jogo Normal da Clique é PSPACE-Difícil

[Chandran et al., 2024]: Jogo Misère da Clique é PSPACE-Difícil

[Brosse et al., 2025]: Jogo Optim da Clique é PSPACE-Difícil

[Brams, 1981]: Introduziu o Jogo de Coloração

[Bodlaender, 1991]: Jogo Normal de Coloração é PSPACE-Difícil

[Costa et al., 2019]: Jogo Optim de Coloração é PSPACE-Difícil

[Harary, 1984]: Introduziu os Jogos de Convexidade

[Araujo et al., 2024]: Hull game Normal/Misère é PSPACE-Difícil

[Araujo et al., 2026]: Interval game Optimização é PSPACE-Difícil

[Brešar et al., 2013]: Introduziu o Jogo de Dominação

[Brešar et al., 2016]: Jogo Optimização de Dominação é PSPACE-Difícil

[Brito et al., 2025]: Jogo Normal/Misère Dominação é PSPACE-Difícil

Resultados da literatura de jogos combinatórios

[Dudeney, 1907]: Introduziu o Jogo Kayles, que levou ao Jogo da Clique

[Schaefer, 1978]: Jogo Normal da Clique é PSPACE-Difícil

[Chandran et al., 2024]: Jogo Misère da Clique é PSPACE-Difícil

[Brosse et al., 2025]: Jogo Optim da Clique é PSPACE-Difícil

[Brams, 1981]: Introduziu o Jogo de Coloração

[Bodlaender, 1991]: Jogo Normal de Coloração é PSPACE-Difícil

[Costa et al., 2019]: Jogo Optim de Coloração é PSPACE-Difícil

[Harary, 1984]: Introduziu os Jogos de Convexidade

[Araujo et al., 2024]: Hull game Normal/Misère é PSPACE-Difícil

[Araujo et al., 2026]: Interval game Optimização é PSPACE-Difícil

[Brešar et al., 2013]: Introduziu o Jogo de Dominação

[Brešar et al., 2016]: Jogo Optimização de Dominação é PSPACE-Difícil

[Brito et al., 2025]: Jogo Normal/Misère Dominação é PSPACE-Difícil

Nossos resultados no Jogo da Cobertura

Variante Normal: usamos a Teoria de Sprague-Grundy para obter um algoritmo polinomial para decidir o vencedor na união disjunta de caminhos, ciclos e grafos multipartido completos.

O caso de caminhos e ciclos está fortemente relacionada ao clássico jogo *Couples-are-Forever* de J. H. Conway. Para n até 50 milhões, Bob só vence em caminhos para no máximo 14 valores de n [Caines et al., 1999].

Variante Opt.:

- ▶ $vc_g(G)$ é NP-Difícil
- ▶ Algoritmo 2-aproximativo
- ▶ Algoritmo FPT em k para decidir se $vc_g(G) \leq k$.
- ▶ Algoritmo polinomial para decidir o vencedor em florestas de estrelas, usando a Técnica do Potencial.
- ▶ Algoritmo polinomial para grafos multipartido completos e união disjunta de caminhos.

Nossos resultados no Jogo da Cobertura

Variante Normal: usamos a Teoria de Sprague-Grundy para obter um algoritmo polinomial para decidir o vencedor na união disjunta de caminhos, ciclos e grafos multipartido completos.

O caso de caminhos e ciclos está fortemente relacionada ao clássico jogo *Couples-are-Forever* de J. H. Conway. Para n até 50 milhões, Bob só vence em caminhos para no máximo 14 valores de n [Caines et al., 1999].

Variante Opt.:

- ▶ $vc_g(G)$ é NP-Difícil
- ▶ Algoritmo 2-aproximativo
- ▶ Algoritmo FPT em k para decidir se $vc_g(G) \leq k$.
- ▶ Algoritmo polinomial para decidir o vencedor em florestas de estrelas, usando a Técnica do Potencial.
- ▶ Algoritmo polinomial para grafos multipartido completos e união disjunta de caminhos.

Variedade Normal do Jogo da Cobertura

Teoria de Sprague-Grundy (1930s): Todo jogo normal imparcial finito J pode ser associado a um número natural (*nimber*) do seguinte modo: se não há jogadas, $\text{nim}(J) = 0$; senão, $\text{nim}(J) = \text{mex}\{N_1, \dots, N_\ell\}$ sobre o conjunto dos nimbers que podem ser obtidos após uma jogada. O primeiro jogador vence se e só se o $\text{nim}(J) > 0$. Além disso, $\text{nim}(J_1 + J_2) = \text{nim}(J_1) \oplus \text{nim}(J_2)$, onde $\oplus$ é a operação bitwise-xor.

Exemplo: $\text{nim}(P_1) = 0$; $\text{nim}(P_2) = \text{mex}\{0\} = 1$,
 $\text{nim}(P_3) = \text{mex}\{0, 1\} = 2$; $\text{nim}(P_4) = \text{mex}\{1, 2\} = 0$.

Teorema: O nimber $\text{nim}(P_n)$ de um caminho P_n na variedade normal do Jogo da Cobertura pode ser obtido em tempo quadrático pela seguinte recorrência. Se $n \in \{0, 1\}$, $\text{nim}(P_n) = 0$. Senão,

$$\text{nim}(P_n) = \text{mex} \left\{ \text{nim}(P_{k-1}) \oplus \text{nim}(P_{n-k}) : k = 1 \dots \lceil n/2 \rceil \right\}.$$

Variedade Normal do Jogo da Cobertura

Teoria de Sprague-Grundy (1930s): Todo jogo normal imparcial finito J pode ser associado a um número natural (*nimber*) do seguinte modo: se não há jogadas, $\text{nim}(J) = 0$; senão, $\text{nim}(J) = \text{mex}\{N_1, \dots, N_\ell\}$ sobre o conjunto dos nimbers que podem ser obtidos após uma jogada. O primeiro jogador vence se e só se o $\text{nim}(J) > 0$. Além disso, $\text{nim}(J_1 + J_2) = \text{nim}(J_1) \oplus \text{nim}(J_2)$, onde $\oplus$ é a operação bitwise-xor.

Exemplo: $\text{nim}(P_1) = 0$; $\text{nim}(P_2) = \text{mex}\{0\} = 1$,
 $\text{nim}(P_3) = \text{mex}\{0, 1\} = 2$; $\text{nim}(P_4) = \text{mex}\{1, 2\} = 0$.

Teorema: O nimber $\text{nim}(P_n)$ de um caminho P_n na variedade normal do Jogo da Cobertura pode ser obtido em tempo quadrático pela seguinte recorrência. Se $n \in \{0, 1\}$, $\text{nim}(P_n) = 0$. Senão,

$$\text{nim}(P_n) = \text{mex} \left\{ \text{nim}(P_{k-1}) \oplus \text{nim}(P_{n-k}) : k = 1 \dots \lceil n/2 \rceil \right\}.$$

Variante Normal: caminhos e ciclos

Lista dos primeiros numbers $\text{nim}(P_n)$ para $n = 0, \dots, 30$:

0, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 0, 3, 4, 2, 1, 3, 2, 1, 0, 2, 1, 4, 5, 1, 4, 5, 1, 2, 0

Curiosamente, essa sequência é a mesma do clássico jogo Couples-are-Forever de J. H. Conway. Ainda é um problema em aberto se é periódica ou não [Caines et al., 1999]. Considerando os primeiros 50 milhões de numbers, Bob vence em P_n apenas para 14 valores de n :

0, 1, 4, 12, 20, 30, 46, 72, 98, 124, 150, 176, 314, 408.

Corolário: $\text{nim}(C_n)$ é 0 ou 1 dependendo se $\text{nim}(P_{n-1}) > 0$ ou $= 0$.

Nos primeiros 50 milhões de numbers, Alice vence em C_n apenas para 14 valores de n :

5, 13, 21, 31, 47, 73, 99, 125, 151, 177, 315, 409.

Variante Normal: caminhos e ciclos

Lista dos primeiros numbers $\text{nim}(P_n)$ para $n = 0, \dots, 30$:

0, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 0, 3, 4, 2, 1, 3, 2, 1, 0, 2, 1, 4, 5, 1, 4, 5, 1, 2, 0

Curiosamente, essa sequência é a mesma do clássico jogo Couples-are-Forever de J. H. Conway. Ainda é um problema em aberto se é periódica ou não [Caines et al., 1999]. Considerando os primeiros 50 milhões de numbers, Bob vence em P_n apenas para 14 valores de n :

0, 1, 4, 12, 20, 30, 46, 72, 98, 124, 150, 176, 314, 408.

Corolário: $\text{nim}(C_n)$ é 0 ou 1 dependendo se $\text{nim}(P_{n-1}) > 0$ ou $= 0$.

Nos primeiros 50 milhões de numbers, Alice vence em C_n apenas para 14 valores de n :

5, 13, 21, 31, 47, 73, 99, 125, 151, 177, 315, 409.

Variante Normal: caminhos e ciclos

Lista dos primeiros numbers $\text{nim}(P_n)$ para $n = 0, \dots, 30$:

0, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 0, 3, 4, 2, 1, 3, 2, 1, 0, 2, 1, 4, 5, 1, 4, 5, 1, 2, 0

Curiosamente, essa sequência é a mesma do clássico jogo Couples-are-Forever de J. H. Conway. Ainda é um problema em aberto se é periódica ou não [Caines et al., 1999]. Considerando os primeiros 50 milhões de numbers, Bob vence em P_n apenas para 14 valores de n :

0, 1, 4, 12, 20, 30, 46, 72, 98, 124, 150, 176, 314, 408.

Corolário: $\text{nim}(C_n)$ é 0 ou 1 dependendo se $\text{nim}(P_{n-1}) > 0$ ou $= 0$.

Nos primeiros 50 milhões de numbers, Alice vence em C_n apenas para 14 valores de n :

5, 13, 21, 31, 47, 73, 99, 125, 151, 177, 315, 409.

Variante Normal: grafo multipartido completo

Teorema: Seja G um grafo multipartido completo com $k \geq 2$ partes de tamanhos $1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_k$. Seja $n = \sum_{i=1}^k n_i$ e $n' = n - n_k$. Então, o nimber de G na variante normal do Jogo da Cobertura é:

$$\text{nim}(G) = \begin{cases} 1 \text{ ou } 0, & \text{se } n' \leq 2k - 4 \text{ dependendo se } n \text{ é par ou ímpar,} \\ 1 \text{ ou } 2, & \text{se } n' = 2k - 3 \text{ dependendo se } n \text{ é par ou ímpar,} \\ 0 \text{ ou } 2, & \text{se } n' = 2k - 2 \text{ dependendo se } n \text{ é par ou ímpar,} \\ 0 \text{ ou } 1, & \text{se } n' \geq 2k - 1 \text{ dependendo se } n \text{ é par ou ímpar,} \end{cases}$$

Note que:

$$\begin{array}{ll} 1 = \text{mex}\{0, 2\} = \text{mex}\{0\} & | \quad 0 = \text{mex}\{1, 1\} = \text{mex}\{1\} \\ 1 = \text{mex}\{0, 2, 2\} & | \quad 2 = \text{mex}\{1, 1, 0\} \\ 0 = \text{mex}\{2, 2, 1\} & | \quad 2 = \text{mex}\{1, 0, 0\} \\ 0 = \text{mex}\{2, 1\} = \text{mex}\{1\} & | \quad 1 = \text{mex}\{0, 0\} = \text{mex}\{0\} \end{array}$$

Corolário O Jogo da Cobertura na variante normal tem algoritmo polinomial para decidir o vencedor na união de caminhos, ciclos e grafos multipartidos completos.

Variante Normal: grafo multipartido completo

Teorema: Seja G um grafo multipartido completo com $k \geq 2$ partes de tamanhos $1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_k$. Seja $n = \sum_{i=1}^k n_i$ e $n' = n - n_k$. Então, o nimber de G na variante normal do Jogo da Cobertura é:

$$\text{nim}(G) = \begin{cases} 1 \text{ ou } 0, & \text{se } n' \leq 2k - 4 \text{ dependendo se } n \text{ é par ou ímpar,} \\ 1 \text{ ou } 2, & \text{se } n' = 2k - 3 \text{ dependendo se } n \text{ é par ou ímpar,} \\ 0 \text{ ou } 2, & \text{se } n' = 2k - 2 \text{ dependendo se } n \text{ é par ou ímpar,} \\ 0 \text{ ou } 1, & \text{se } n' \geq 2k - 1 \text{ dependendo se } n \text{ é par ou ímpar,} \end{cases}$$

Note que:

$$\begin{array}{l|l} 1 = \text{mex}\{0, 2\} = \text{mex}\{0\} & 0 = \text{mex}\{1, 1\} = \text{mex}\{1\} \\ 1 = \text{mex}\{0, 2, 2\} & 2 = \text{mex}\{1, 1, 0\} \\ 0 = \text{mex}\{2, 2, 1\} & 2 = \text{mex}\{1, 0, 0\} \\ 0 = \text{mex}\{2, 1\} = \text{mex}\{1\} & 1 = \text{mex}\{0, 0\} = \text{mex}\{0\} \end{array}$$

Corolário O Jogo da Cobertura na variante normal tem algoritmo polinomial para decidir o vencedor na união de caminhos, ciclos e grafos multipartidos completos.

Variante Normal: grafo multipartido completo

Teorema: Seja G um grafo multipartido completo com $k \geq 2$ partes de tamanhos $1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_k$. Seja $n = \sum_{i=1}^k n_i$ e $n' = n - n_k$. Então, o nimber de G na variante normal do Jogo da Cobertura é:

$$\text{nim}(G) = \begin{cases} 1 \text{ ou } 0, & \text{se } n' \leq 2k - 4 \text{ dependendo se } n \text{ é par ou ímpar,} \\ 1 \text{ ou } 2, & \text{se } n' = 2k - 3 \text{ dependendo se } n \text{ é par ou ímpar,} \\ 0 \text{ ou } 2, & \text{se } n' = 2k - 2 \text{ dependendo se } n \text{ é par ou ímpar,} \\ 0 \text{ ou } 1, & \text{se } n' \geq 2k - 1 \text{ dependendo se } n \text{ é par ou ímpar,} \end{cases}$$

Note que:

$$\begin{array}{l|l} 1 = \text{mex}\{0, 2\} = \text{mex}\{0\} & 0 = \text{mex}\{1, 1\} = \text{mex}\{1\} \\ 1 = \text{mex}\{0, 2, 2\} & 2 = \text{mex}\{1, 1, 0\} \\ 0 = \text{mex}\{2, 2, 1\} & 2 = \text{mex}\{1, 0, 0\} \\ 0 = \text{mex}\{2, 1\} = \text{mex}\{1\} & 1 = \text{mex}\{0, 0\} = \text{mex}\{0\} \end{array}$$

Corolário O Jogo da Cobertura na variante normal tem algoritmo polinomial para decidir o vencedor na união de caminhos, ciclos e grafos multipartidos completos.

Variante Opt: resultados gerais

[Bujtás, Henning, Tuza, 2016]: Limitantes apertados:

$$\text{vc}(G) \leq \text{vc}_g(G) \leq 2 \text{vc}(G) - 1$$

$$\text{vc}(G) \leq \text{vc}_g^B(G) \leq 2 \text{vc}(G)$$

$$|\text{vc}_g(G) - \text{vc}_g^B(G)| \leq 1$$

K_n , P_n , C_n e S_{n-1} : grafo completo, caminho, ciclo e estrela de n vértices.

Note que $S_0 = P_1 = K_1$, $S_1 = P_2 = K_2$ e $S_2 = P_3$.

Limite inferior:

$$\text{vc}_g(K_n) = \text{vc}_g^B(K_n) = \text{vc}(K_n) = n - 1 \quad \text{e} \quad \text{vc}_g(P_4) = \text{vc}_g^B(P_4) = \text{vc}(P_4) = 3.$$

$$\text{vc}_g(kK_n) = \text{vc}_g^B(kK_n) = \text{vc}(kK_n) = k(n - 1) \quad \text{e} \quad \text{vc}_g(kP_4) = \text{vc}_g^B(kP_4) = \text{vc}(kP_4) = 2k.$$

Limite Superior:

$$\text{vc}(kS_k) = k, \quad \text{vc}_g(kS_k) = 2k - 1 \quad \text{e} \quad \text{vc}_g^B(kS_k) = 2k \quad \text{para } k \geq 3.$$

Bob pode sempre escolher uma folha e Alice deve jogar nos centros das k estrelas.

Desigualdade:

$$\text{vc}_g(S_k) = \text{vc}(S_k) = 1; \quad \text{vc}_g^B(S_k) = 2$$

$$\text{vc}_g^B(C_4) = \text{vc}(C_4) = 2; \quad \text{vc}_g(C_4) = 3$$

Variante Opt: resultados gerais

[Bujtás, Henning, Tuza, 2016]: Limitantes apertados:

$$\text{vc}(G) \leq \text{vc}_g(G) \leq 2 \text{vc}(G) - 1$$

$$\text{vc}(G) \leq \text{vc}_g^B(G) \leq 2 \text{vc}(G)$$

$$|\text{vc}_g(G) - \text{vc}_g^B(G)| \leq 1$$

K_n , P_n , C_n e S_{n-1} : grafo completo, caminho, ciclo e estrela de n vértices.
Note que $S_0 = P_1 = K_1$, $S_1 = P_2 = K_2$ e $S_2 = P_3$.

Limite inferior:

$$\text{vc}_g(K_n) = \text{vc}_g^B(K_n) = \text{vc}(K_n) = n - 1 \quad \text{e} \quad \text{vc}_g(P_4) = \text{vc}_g^B(P_4) = \text{vc}(P_4) = 3.$$

$$\text{vc}_g(kK_n) = \text{vc}_g^B(kK_n) = \text{vc}(kK_n) = k(n - 1) \quad \text{e} \quad \text{vc}_g(kP_4) = \text{vc}_g^B(kP_4) = \text{vc}(kP_4) = 2k.$$

Limite Superior:

$$\text{vc}(kS_k) = k, \quad \text{vc}_g(kS_k) = 2k - 1 \quad \text{e} \quad \text{vc}_g^B(kS_k) = 2k \quad \text{para } k \geq 3.$$

Bob pode sempre escolher uma folha e Alice deve jogar nos centros das k estrelas.

Desigualdade:

$$\text{vc}_g(S_k) = \text{vc}(S_k) = 1; \quad \text{vc}_g^B(S_k) = 2$$

$$\text{vc}_g^B(C_4) = \text{vc}(C_4) = 2; \quad \text{vc}_g(C_4) = 3$$

Variante Opt: resultados gerais

[Bujtás, Henning, Tuza, 2016]: Limitantes apertados:

$$\text{vc}(G) \leq \text{vc}_g(G) \leq 2 \text{vc}(G) - 1$$

$$\text{vc}(G) \leq \text{vc}_g^B(G) \leq 2 \text{vc}(G)$$

$$|\text{vc}_g(G) - \text{vc}_g^B(G)| \leq 1$$

K_n , P_n , C_n e S_{n-1} : grafo completo, caminho, ciclo e estrela de n vértices.
Note que $S_0 = P_1 = K_1$, $S_1 = P_2 = K_2$ e $S_2 = P_3$.

Limite inferior:

$$\text{vc}_g(K_n) = \text{vc}_g^B(K_n) = \text{vc}(K_n) = n - 1 \quad \text{e} \quad \text{vc}_g(P_4) = \text{vc}_g^B(P_4) = \text{vc}(P_4) = 3.$$

$$\text{vc}_g(kK_n) = \text{vc}_g^B(kK_n) = \text{vc}(kK_n) = k(n - 1) \quad \text{e} \quad \text{vc}_g(kP_4) = \text{vc}_g^B(kP_4) = \text{vc}(kP_4) = 2k.$$

Limite Superior:

$$\text{vc}(kS_k) = k, \text{vc}_g(kS_k) = 2k - 1 \quad \text{e} \quad \text{vc}_g^B(kS_k) = 2k \quad \text{para } k \geq 3.$$

Bob pode sempre escolher uma folha e Alice deve jogar nos centros das k estrelas.

Desigualdade:

$$\text{vc}_g(S_k) = \text{vc}(S_k) = 1; \quad \text{vc}_g^B(S_k) = 2$$

$$\text{vc}_g^B(C_4) = \text{vc}(C_4) = 2; \quad \text{vc}_g(C_4) = 3$$

Variante Opt: resultados gerais

[Bujtás, Henning, Tuza, 2016]: Limitantes apertados:

$$\text{vc}(G) \leq \text{vc}_g(G) \leq 2 \text{vc}(G) - 1$$

$$\text{vc}(G) \leq \text{vc}_g^B(G) \leq 2 \text{vc}(G)$$

$$|\text{vc}_g(G) - \text{vc}_g^B(G)| \leq 1$$

K_n , P_n , C_n e S_{n-1} : grafo completo, caminho, ciclo e estrela de n vértices.
Note que $S_0 = P_1 = K_1$, $S_1 = P_2 = K_2$ e $S_2 = P_3$.

Limite inferior:

$$\text{vc}_g(K_n) = \text{vc}_g^B(K_n) = \text{vc}(K_n) = n - 1 \quad \text{e} \quad \text{vc}_g(P_4) = \text{vc}_g^B(P_4) = \text{vc}(P_4) = 3.$$

$$\text{vc}_g(kK_n) = \text{vc}_g^B(kK_n) = \text{vc}(kK_n) = k(n - 1) \quad \text{e} \quad \text{vc}_g(kP_4) = \text{vc}_g^B(kP_4) = \text{vc}(kP_4) = 2k.$$

Limite Superior:

$$\text{vc}(kS_k) = k, \quad \text{vc}_g(kS_k) = 2k - 1 \quad \text{e} \quad \text{vc}_g^B(kS_k) = 2k \quad \text{para } k \geq 3.$$

Bob pode sempre escolher uma folha e Alice deve jogar nos centros das k estrelas.

Desigualdade:

$$\text{vc}_g(S_k) = \text{vc}(S_k) = 1; \quad \text{vc}_g^B(S_k) = 2$$

$$\text{vc}_g^B(C_4) = \text{vc}(C_4) = 2; \quad \text{vc}_g(C_4) = 3$$

Variante Opt: florestas de estrelas

Teorema: Seja G uma floresta com s estrelas e $d = \Delta(G)$. Para $1 \leq i \leq d$, seja n_i o número de estrelas de grau i . Então

$$vc_g(G) = 2s - \left\lceil \sum_{i=1}^d \frac{n_i}{2^{i-1}} \right\rceil = \left\lfloor \sum_{i=1}^d \left(\frac{2^i - 1}{2^{i-1}} \right) n_i \right\rfloor$$

O ótimo é obtido quando Alice sempre joga no centro e Bob sempre joga nas folhas da maior estrela. Além disso, $vc_g^B(G) = vc_g(G^*) + 1$, onde G^* é obtido de G removendo uma folha da maior estrela.

Técnica do Potencial: associa o potencial $1/2^k$ a cada estrela de grau k . Grosso modo, Alice mata estrelas levando o potencial de $1/2^k$ a 0, enquanto Bob leva de $1/2^k$ a $2/2^k$, mantendo o potencial total constante.

No final, sobrarão apenas estrelas de grau 0 (potencial 1) que não foram mortas por Alice, com potencial total final “igual” ao inicial

$$s - \left\lceil \frac{T}{2} \right\rceil \approx \sum_{i=1}^d n_i \cdot \frac{1}{2^i} \implies T \approx 2s - \left\lfloor \sum_{i=1}^d \frac{n_i}{2^{i-1}} \right\rfloor$$

Variante Opt: florestas de estrelas

Teorema: Seja G uma floresta com s estrelas e $d = \Delta(G)$. Para $1 \leq i \leq d$, seja n_i o número de estrelas de grau i . Então

$$vc_g(G) = 2s - \left\lceil \sum_{i=1}^d \frac{n_i}{2^{i-1}} \right\rceil = \left\lfloor \sum_{i=1}^d \left(\frac{2^i - 1}{2^{i-1}} \right) n_i \right\rfloor$$

O ótimo é obtido quando Alice sempre joga no centro e Bob sempre joga nas folhas da maior estrela. Além disso, $vc_g^B(G) = vc_g(G^*) + 1$, onde G^* é obtido de G removendo uma folha da maior estrela.

Técnica do Potencial: associa o potencial $1/2^k$ a cada estrela de grau k . Grosso modo, Alice mata estrelas levando o potencial de $1/2^k$ a 0, enquanto Bob leva de $1/2^k$ a $2/2^k$, mantendo o potencial total constante.

No final, sobrarão apenas estrelas de grau 0 (potencial 1) que não foram mortas por Alice, com potencial total final “igual” ao inicial

$$s - \left\lceil \frac{T}{2} \right\rceil \approx \sum_{i=1}^d n_i \cdot \frac{1}{2^i} \implies T \approx 2s - \left\lceil \sum_{i=1}^d \frac{n_i}{2^{i-1}} \right\rceil$$

Variante Opt: florestas de estrelas

Teorema: Seja G uma floresta com s estrelas e $d = \Delta(G)$. Para $1 \leq i \leq d$, seja n_i o número de estrelas de grau i . Então

$$vc_g(G) = 2s - \left\lceil \sum_{i=1}^d \frac{n_i}{2^{i-1}} \right\rceil = \left\lfloor \sum_{i=1}^d \left(\frac{2^i - 1}{2^{i-1}} \right) n_i \right\rfloor$$

O ótimo é obtido quando Alice sempre joga no centro e Bob sempre joga nas folhas da maior estrela. Além disso, $vc_g^B(G) = vc_g(G^*) + 1$, onde G^* é obtido de G removendo uma folha da maior estrela.

Técnica do Potencial: associa o potencial $1/2^k$ a cada estrela de grau k . Grosso modo, Alice mata estrelas levando o potencial de $1/2^k$ a 0, enquanto Bob leva de $1/2^k$ a $2/2^k$, mantendo o potencial total constante.

No final, sobrarão apenas estrelas de grau 0 (potencial 1) que não foram mortas por Alice, com potencial total final “igual” ao inicial

$$s - \left\lceil \frac{T}{2} \right\rceil \approx \sum_{i=1}^d n_i \cdot \frac{1}{2^i} \implies T \approx 2s - \left\lfloor \sum_{i=1}^d \frac{n_i}{2^{i-1}} \right\rfloor$$

Variante Opt: florestas de caminhos

Teorema: Seja G uma floresta de k caminhos $P_{n_1}, \dots, P_{n_k}$ com tam. $2 \leq n_1 \leq \dots \leq n_k$. Seja β o número de caminhos múltiplos de 3.

$$vc_g(G) = \left\lfloor \frac{\beta}{2} \right\rfloor + \sum_{i=1}^k \left\lfloor \frac{2n_i - 1}{3} \right\rfloor \quad \text{e} \quad vc_g^B(G) = \left\lceil \frac{\beta}{2} \right\rceil + \sum_{i=1}^k \left\lfloor \frac{2n_i - 1}{3} \right\rfloor$$

Basicamente, provamos que Alice e Bob preferem jogar em caminhos múltiplos de 3.

Variante Opt: grafo multipartido completo

Teorema: Seja G um grafo multipartido completo com $k \geq 2$ partes de tamanhos $1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_k$. Seja $n = \sum_{i=1}^k n_i$ e $n' = n - n_k$.

$$vc_g(G) = \begin{cases} n - 1, & \text{se } n > 2n_k \text{ e } n \text{ é par} & (a) \\ n - 2, & \text{se } n > 2n_k \text{ e } n \text{ é ímpar} & (b) \\ 2n' - 1, & \text{se } n \leq 2n_k & (c) \end{cases}$$

Exemplos:

- (a) 444-344-334-234-233-133-123-23-22-12-11-fim
- (b) 445-345-344-244-234-134-133-33-23-13-12-fim
- (a) 446-346-345-245-244-144-134-34-33-23-22-12-11-fim
- (b) 447-347-346-246-245-145-144-44-34-24-23-13-12-fim
- (c) 448-348-347-247-246-146-145-45-44-34-33-23-22-12-11-fim
- (c) 449-349-348-248-247-147-146-46-45-35-34-24-23-13-12-fim
- (c) 44X-34X-349-249-248-148-147-47-46-36-35-25-24-14-13-fim

Variante Opt: grafo multipartido completo

Teorema: Seja G um grafo multipartido completo com $k \geq 2$ partes de tamanhos $1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_k$. Seja $n = \sum_{i=1}^k n_i$ e $n' = n - n_k$.

$$vc_g(G) = \begin{cases} n - 1, & \text{se } n > 2n_k \text{ e } n \text{ é par} & (a) \\ n - 2, & \text{se } n > 2n_k \text{ e } n \text{ é ímpar} & (b) \\ 2n' - 1, & \text{se } n \leq 2n_k & (c) \end{cases}$$

Exemplos:

- (a) 444-344-334-234-233-133-123-23-22-12-11-fim
- (b) 445-345-344-244-234-134-133-33-23-13-12-fim
- (a) 446-346-345-245-244-144-134-34-33-23-22-12-11-fim
- (b) 447-347-346-246-245-145-144-44-34-24-23-13-12-fim
- (c) 448-348-347-247-246-146-145-45-44-34-33-23-22-12-11-fim
- (c) 449-349-348-248-247-147-146-46-45-35-34-24-23-13-12-fim
- (c) 44X-34X-349-249-248-148-147-47-46-36-35-25-24-14-13-fim

Variante Opt: FPT + 2-aprox + NP-hard + open

Teorema (2-aproximação): Existe um algoritmo guloso de tempo polinomial que vence como Alice em no máximo $2 \text{vc}_g(G) + 1$ turnos para qualquer grafo G .

Teorema (FPT): Dado um grafo G e um inteiro k , existe um algoritmo que decide se $\text{vc}_g(G) \leq k$ em tempo $O(n + 2^{\Theta(k^2)})$.

Teorema (NP-hard): O Jogo da Cobertura é NP-difícil

Problema em aberto: O Jogo da Cobertura é PSPACE-completo tanto na variante de otimização como nas variantes normal e misère.

Obrigado ETC-2026 !!!

Variante Opt: FPT + 2-aprox + NP-hard + open

Teorema (2-aproximação): Existe um algoritmo guloso de tempo polinomial que vence como Alice em no máximo $2 \text{vc}_g(G) + 1$ turnos para qualquer grafo G .

Teorema (FPT): Dado um grafo G e um inteiro k , existe um algoritmo que decide se $\text{vc}_g(G) \leq k$ em tempo $O(n + 2^{\Theta(k^2)})$.

Teorema (NP-hard): O Jogo da Cobertura é NP-difícil

Problema em aberto: O Jogo da Cobertura é PSPACE-completo tanto na variante de otimização como nas variantes normal e misère.

Obrigado ETC-2026 !!!

Variante Opt: FPT + 2-aprox + NP-hard + open

Teorema (2-aproximação): Existe um algoritmo guloso de tempo polinomial que vence como Alice em no máximo $2 \text{vc}_g(G) + 1$ turnos para qualquer grafo G .

Teorema (FPT): Dado um grafo G e um inteiro k , existe um algoritmo que decide se $\text{vc}_g(G) \leq k$ em tempo $O(n + 2^{\Theta(k^2)})$.

Teorema (NP-hard): O Jogo da Cobertura é NP-difícil

Problema em aberto: O Jogo da Cobertura é PSPACE-completo tanto na variante de otimização como nas variantes normal e misère.

Obrigado ETC-2026 !!!

Variante Opt: FPT + 2-aprox + NP-hard + open

Teorema (2-aproximação): Existe um algoritmo guloso de tempo polinomial que vence como Alice em no máximo $2 \text{vc}_g(G) + 1$ turnos para qualquer grafo G .

Teorema (FPT): Dado um grafo G e um inteiro k , existe um algoritmo que decide se $\text{vc}_g(G) \leq k$ em tempo $O(n + 2^{\Theta(k^2)})$.

Teorema (NP-hard): O Jogo da Cobertura é NP-difícil

Problema em aberto: O Jogo da Cobertura é PSPACE-completo tanto na variante de otimização como nas variantes normal e misère.

Obrigado ETC-2026 !!!

Variante Opt: FPT + 2-aprox + NP-hard + open

Teorema (2-aproximação): Existe um algoritmo guloso de tempo polinomial que vence como Alice em no máximo $2 \text{vc}_g(G) + 1$ turnos para qualquer grafo G .

Teorema (FPT): Dado um grafo G e um inteiro k , existe um algoritmo que decide se $\text{vc}_g(G) \leq k$ em tempo $O(n + 2^{\Theta(k^2)})$.

Teorema (NP-hard): O Jogo da Cobertura é NP-difícil

Problema em aberto: O Jogo da Cobertura é PSPACE-completo tanto na variante de otimização como nas variantes normal e misère.

Obrigado ETC-2026 !!!