

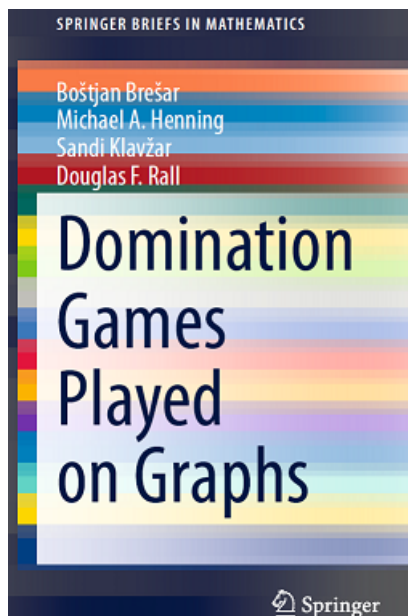
Jogo Normal Partizan de Dominação nas Estrelas

**J. M. Brito, Edileudo M. M. Filho,
Jefer G. M. Paz, Rudini Sampaio**

Dept. Computação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Brazil

ETC-2026, CSBC,
Gramado, quarta, 22-Julho, 8h

Livro sobre o Jogo de Dominação (variante opt), 2021



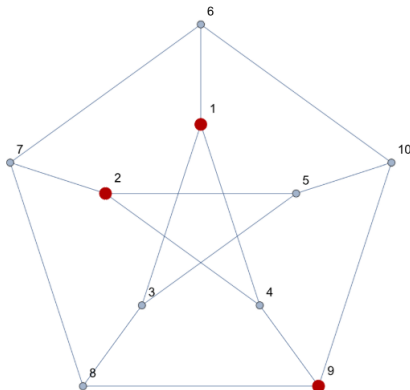
Jogo de Dominação em Grafos: definições

Um vértice x **domina** um vértice y em um grafo se $y = x$ ou xy é aresta.

Um conjunto S de vértices é **dominante** se todo vértice é dominado por algum vértice de S .

Domination number $\gamma(G)$: tamanho do menor conjunto dominante de G .

Exemplo: $\gamma(K_n) = 1$. $\gamma(P_n) = \gamma(C_n) = \lceil n/3 \rceil$.



Jogo de Dominação em Grafos: definições

Domination number $\gamma(G)$: tamanho do menor conjunto dominante de G .

Exemplo: $\gamma(K_n) = 1$. $\gamma(P_n) = \gamma(C_n) = \lceil n/3 \rceil$.

Jogo de Dominação: Alice e Bob se alternam escolhendo em cada turno um vértice **jogável**: que domina ao menos um vértice não dominado pelos vértices escolhidos antes). O jogo termina quando está tudo dominado.

Variante Normal: perde quem não puder jogar (último a jogar vence).

Variante Misère: vence quem não puder jogar (último a jogar perde).

Variante de Otimização: Alice vence se forem escolhidos $\leq k$ vértices.

Game Domination number $\gamma_g(G)$: menor k tal que Alice vence a variante de otimização. $\gamma_g(G) \geq \gamma(G)$. **Exemplo:** $\gamma_g(K_n) = 1$

$$\gamma_g(P_n) = \gamma_g(C_n) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1, & \text{se } n \% 4 = 3, \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Teorema [Brešar, Dorbec, Klavžar, Košmrlj, Renault, 2016]:

$\gamma_g(G)$ é PSPACE-difícil.

Jogo de Dominação em Grafos: definições

Domination number $\gamma(G)$: tamanho do menor conjunto dominante de G .

Exemplo: $\gamma(K_n) = 1$. $\gamma(P_n) = \gamma(C_n) = \lceil n/3 \rceil$.

Jogo de Dominação: Alice e Bob se alternam escolhendo em cada turno um vértice *jogável*: que domina ao menos um vértice não dominado pelos vértices escolhidos antes). O jogo termina quando está tudo dominado.

Variante Normal: perde quem não puder jogar (último a jogar vence).

Variante Misère: vence quem não puder jogar (último a jogar perde).

Variante de Otimização: Alice vence se forem escolhidos $\leq k$ vértices.

Game Domination number $\gamma_g(G)$: menor k tal que Alice vence a variante de otimização. $\gamma_g(G) \geq \gamma(G)$. **Exemplo:** $\gamma_g(K_n) = 1$

$$\gamma_g(P_n) = \gamma_g(C_n) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1, & \text{se } n \% 4 = 3, \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Teorema [Brešar, Dorbec, Klavžar, Košmrlj, Renault, 2016]:

$\gamma_g(G)$ é PSPACE-difícil.

Jogo de Dominação em Grafos: definições

Domination number $\gamma(G)$: tamanho do menor conjunto dominante de G .

Exemplo: $\gamma(K_n) = 1$. $\gamma(P_n) = \gamma(C_n) = \lceil n/3 \rceil$.

Jogo de Dominação: Alice e Bob se alternam escolhendo em cada turno um vértice **jogável**: que domina ao menos um vértice não dominado pelos vértices escolhidos antes). O jogo termina quando está tudo dominado.

Variante Normal: perde quem não puder jogar (último a jogar vence).

Variante Misère: vence quem não puder jogar (último a jogar perde).

Variante de Otimização: Alice vence se forem escolhidos $\leq k$ vértices.

Game Domination number $\gamma_g(G)$: menor k tal que Alice vence a variante de otimização. $\gamma_g(G) \geq \gamma(G)$. **Exemplo:** $\gamma_g(K_n) = 1$

$$\gamma_g(P_n) = \gamma_g(C_n) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1, & \text{se } n \% 4 = 3, \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Teorema [Brešar, Dorbec, Klavžar, Košmrlj, Renault, 2016]:

$\gamma_g(G)$ é PSPACE-difícil.

Jogo de Dominação em Grafos: definições

Domination number $\gamma(G)$: tamanho do menor conjunto dominante de G .

Exemplo: $\gamma(K_n) = 1$. $\gamma(P_n) = \gamma(C_n) = \lceil n/3 \rceil$.

Jogo de Dominação: Alice e Bob se alternam escolhendo em cada turno um vértice *jogável*: que domina ao menos um vértice não dominado pelos vértices escolhidos antes). O jogo termina quando está tudo dominado.

Variante Normal: perde quem não puder jogar (último a jogar vence).

Variante Misère: vence quem não puder jogar (último a jogar perde).

Variante de Otimização: Alice vence se forem escolhidos $\leq k$ vértices.

Game Domination number $\gamma_g(G)$: menor k tal que Alice vence a variante de otimização. $\gamma_g(G) \geq \gamma(G)$. **Exemplo:** $\gamma_g(K_n) = 1$

$$\gamma_g(P_n) = \gamma_g(C_n) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1, & \text{se } n \% 4 = 3, \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Teorema [Brešar, Dorbec, Klavžar, Košmrlj, Renault, 2016]:

$\gamma_g(G)$ é PSPACE-difícil.

Jogo NORMAL de Dominação em Grafos

Variante Normal: vence o último a jogar. Teoria de Sprague-Grundy.

Teorema [Brito, Marcilon, Martins, Sampaio, 2025]:

Jogo NORMAL de Dominação é PSPACE-completo.

Bob vence em P_n se e só se $n \% 4 = 0$.

Bob vence em C_n se e só se $n \% 4 = 3$.

Jogo imparcial: as jogadas possíveis não dependem de quem é o próximo a jogar. **Jogo partizan:** jogo não imparcial.

Jogo NORMAL PARTIZAN de Dominação:

O grafo vem com os vértices coloridos com A , B ou C de modo que Alice (resp. Bob) só pode selecionar vértices de cor A (resp. B) ou C .

Se todos os vértices tem a cor C , voltamos a variante imparcial.

Teorema [Brito, Marcilon, Martins, Sampaio, 2025]:

Jogo NORMAL PARTIZAN de Dominação é PSPACE-completo.

Algoritmo polinomial em caminhos P_n para qualquer coloração inicial

Jogo NORMAL de Dominação em Grafos

Variante Normal: vence o último a jogar. Teoria de Sprague-Grundy.

Teorema [Brito, Marcilon, Martins, Sampaio, 2025]:

Jogo NORMAL de Dominação é PSPACE-completo.

Bob vence em P_n se e só se $n \% 4 = 0$.

Bob vence em C_n se e só se $n \% 4 = 3$.

Jogo imparcial: as jogadas possíveis não dependem de quem é o próximo a jogar. **Jogo partizan:** jogo não imparcial.

Jogo NORMAL PARTIZAN de Dominação:

O grafo vem com os vértices coloridos com A , B ou C de modo que Alice (resp. Bob) só pode selecionar vértices de cor A (resp. B) ou C .

Se todos os vértices tem a cor C , voltamos a variante imparcial.

Teorema [Brito, Marcilon, Martins, Sampaio, 2025]:

Jogo NORMAL PARTIZAN de Dominação é PSPACE-completo.

Algoritmo polinomial em caminhos P_n para qualquer coloração inicial

Jogo NORMAL de Dominação em Grafos

Variante Normal: vence o último a jogar. Teoria de Sprague-Grundy.

Teorema [Brito, Marcilon, Martins, Sampaio, 2025]:

Jogo NORMAL de Dominação é PSPACE-completo.

Bob vence em P_n se e só se $n \% 4 = 0$.

Bob vence em C_n se e só se $n \% 4 = 3$.

Jogo imparcial: as jogadas possíveis não dependem de quem é o próximo a jogar. **Jogo partizan:** jogo não imparcial.

Jogo NORMAL PARTIZAN de Dominação:

O grafo vem com os vértices coloridos com A , B ou C de modo que Alice (resp. Bob) só pode selecionar vértices de cor A (resp. B) ou C .

Se todos os vértices tem a cor C , voltamos a variante imparcial.

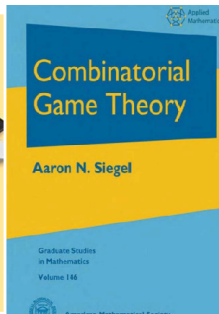
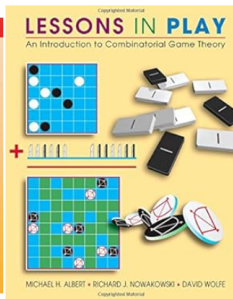
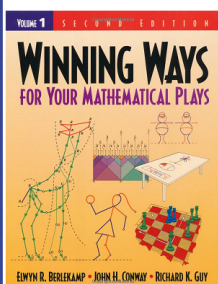
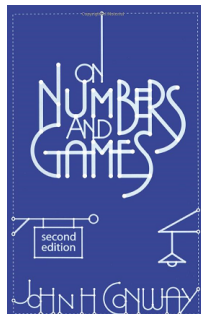
Teorema [Brito, Marcilon, Martins, Sampaio, 2025]:

Jogo NORMAL PARTIZAN de Dominação é PSPACE-completo.

Algoritmo polinomial em caminhos P_n para qualquer coloração inicial

Teoria dos Jogos Combinatórios

Combinatorial Game Theory: todo jogo normal partizan pode ser associado a um valor de um sistema numérico criado por J. H. Conway nos anos 1970, o *Conway abelian group*.

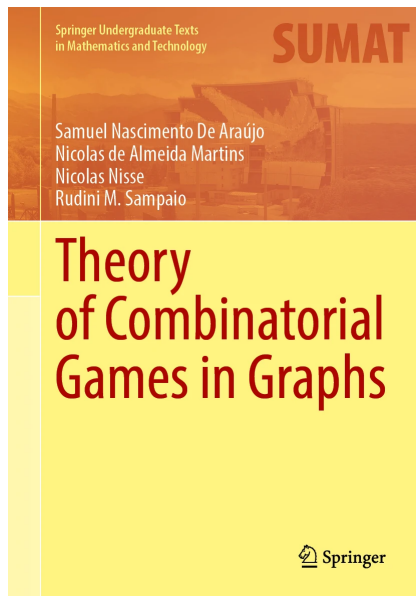


O valor de um jogo é 0 (zero) se e só se o primeiro jogador sempre perde, seja Alice ou Bob.

Valores > 0 são vencedores p/ Alice. Valores < 0 são vencedores p/ Bob.

Valores $\parallel 0$ (incomparáveis com 0) são vencedores para o primeiro jogador.

Teoria dos Jogos Combinatórios



Jogo Normal Partizan de Dominação

O valor de um jogo é 0 (zero) se e só se o primeiro jogador sempre perde, seja Alice ou Bob. Valores > 0 são vencedores para Alice. Valores < 0 são vencedores para Bob. Valores $\neq 0$ (incomparáveis com 0) são vencedores para o primeiro jogador.

Exemplo de caminhos: $A = AA = 1$; $B = BB = -1$; $A + B = 0$;
onde a soma de jogos $J_1 + J_2$ é o jogo em que o próximo a jogar escolhe um dos jogos e faz uma jogada nele.

Exemplo de caminhos:

$AAB = 1/2$, pois $AAB + AAB + B = 0$: o primeiro jogador perde.

Notação $\{X|Y\}$: possíveis jogadas de Alice (X) e de Bob (Y).

Exemplo de caminhos: $A = AA = 1 = \{0|\}$; $B = BB = -1 = \{|\}$;

$C = AB = AC = BC = CC = \{0|0\} = *$

$AAB = BAA = \{0, *|1\} = 1/2$; $BBA = ABB = \{-1|0, *\} = -1/2$

$BAB = \{0|*\} = \uparrow$; $ABA = \{*|0\} = \downarrow = -\uparrow$

$AAA = \{0, 1|\} = 2$; $BBB = \{|0, -1\} = -2$

Jogo Normal Partizan de Dominação

O valor de um jogo é 0 (zero) se e só se o primeiro jogador sempre perde, seja Alice ou Bob. Valores > 0 são vencedores para Alice. Valores < 0 são vencedores para Bob. Valores $\neq 0$ (incomparáveis com 0) são vencedores para o primeiro jogador.

Exemplo de caminhos: $A = AA = 1$; $B = BB = -1$; $A + B = 0$;
onde a **soma de jogos** $J_1 + J_2$ é o jogo em que o próximo a jogar escolhe um dos jogos e faz uma jogada nele.

Exemplo de caminhos:

$AAB = 1/2$, pois $AAB + AAB + B = 0$: o primeiro jogador perde.

Notação $\{X|Y\}$: possíveis jogadas de Alice (X) e de Bob (Y).

Exemplo de caminhos: $A = AA = 1 = \{0|\}$; $B = BB = -1 = \{|\}$;

$C = AB = AC = BC = CC = \{0|0\} = *$

$AAB = BAA = \{0, *|1\} = 1/2$; $BBA = ABB = \{-1|0, *\} = -1/2$

$BAB = \{0|*\} = \uparrow$; $ABA = \{*|0\} = \downarrow = -\uparrow$

$AAA = \{0, 1|\} = 2$; $BBB = \{|0, -1\} = -2$

Combinatorial Game Theory: resultados gerais

$$0 = \{|\}; \quad * = \{0|0\}; \quad 1 = \{0|\}; \quad -1 = \{|0\}$$

$$\uparrow = \{0|*\}; \quad \downarrow = \{*|0\}$$

$$\{0|1\} = \frac{1}{2}; \quad \{0|\frac{1}{2}\} = \frac{1}{4}$$

Teorema 1 (Siegel, 2014): Seja $n \geq 1$ um inteiro. Então:

$$\{0 \mid n \uparrow\} = \{n \uparrow \mid n \uparrow\} = (n+1) \uparrow *$$

$$\{n \downarrow \mid 0\} = \{n \downarrow \mid n \downarrow\} = (n+1) \downarrow *$$

$$\{0 \mid n \uparrow *\} = \{n \uparrow * \mid n \uparrow *\} = (n+1) \uparrow$$

$$\{n \downarrow * \mid 0\} = \{n \downarrow * \mid n \downarrow *\} = (n+1) \downarrow$$

Jogo de Dominação em Grafos Split Completos

Tem partição (K, S) em que K é uma clique e S é um conj. indep.
Todos os vértices de K são gêmeos verdadeiros.

Princípio da Individualidade. Teo. 4: Seja G um grafo com vértices gêmeos verdadeiros u e v . O Jogo Normal Partizan de Dominação em G é equivalente ao jogo em G' , onde G' é obtido de G removendo u e recolorindo v com a cor C se u e v tem cores diferentes em G .

Teo. 5 e 6: grafos split completos. Se todo vértice de K tem cor A (resp. B), o jogo equivale ao jogo na estrela com centro de cor A (resp. B). Senão, o jogo equivale ao jogo na estrela com centro de cor C .

Jogo em grafos split completos se resume ao jogo em estrelas.
Vale também para grafos completos

Jogo de Dominação em Grafos Split Completos

Tem partição (K, S) em que K é uma clique e S é um conj. indep.
Todos os vértices de K são gêmeos verdadeiros.

Princípio da Individualidade. Teo. 4: Seja G um grafo com vértices gêmeos verdadeiros u e v . O Jogo Normal Partizan de Dominação em G é equivalente ao jogo em G' , onde G' é obtido de G removendo u e recolorindo v com a cor C se u e v tem cores diferentes em G .

Teo. 5 e 6: grafos split completos. Se todo vértice de K tem cor A (resp. B), o jogo equivale ao jogo na estrela com centro de cor A (resp. B). Senão, o jogo equivale ao jogo na estrela com centro de cor C .

Jogo em grafos split completos se resume ao jogo em estrelas.
Vale também para grafos completos

Jogo de Dominação das Estrelas (centro de cor A ou B)

Sejam a, b, c o número de folhas de cor A, B e C , resp.

Teoremas 8 e 10: Seja G uma estrela com centro de cor A . O valor é:

$$\text{valor}(G) = \begin{cases} \Gamma(b+c), & \text{se } a = 0 \\ 1/2^{b-a+1}, & \text{se } 0 < a \leq b \text{ e } c = 0 \\ a - b, & \text{se } a > b \text{ e } c = 0 \\ \text{valor}(G') + \Delta(c), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde G' é obtido de G removendo as folhas de cor C ,

$\Gamma(n) = (n-1) \uparrow + \Delta(n)$ e $\Delta(n) = *$, se n é ímpar, e é 0 caso contrário.

Prova usando duas induções matemáticas, uma sem folhas de cor C e outra com folhas de cor C .

Corolário: Seja G uma estrela com centro de cor B . O valor é:

$$\text{valor}(G) = -\text{valor}(-G),$$

onde $-G$ é a estrela obtida de G trocando as cores A e B .

Jogo de Dominação das Estrelas (centro de cor A ou B)

Sejam a, b, c o número de folhas de cor A, B e C , resp.

Teoremas 8 e 10: Seja G uma estrela com centro de cor A . O valor é:

$$\text{valor}(G) = \begin{cases} \Gamma(b+c), & \text{se } a = 0 \\ 1/2^{b-a+1}, & \text{se } 0 < a \leq b \text{ e } c = 0 \\ a - b, & \text{se } a > b \text{ e } c = 0 \\ \text{valor}(G') + \Delta(c), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde G' é obtido de G removendo as folhas de cor C ,

$\Gamma(n) = (n-1) \uparrow + \Delta(n)$ e $\Delta(n) = *$, se n é ímpar, e é 0 caso contrário.

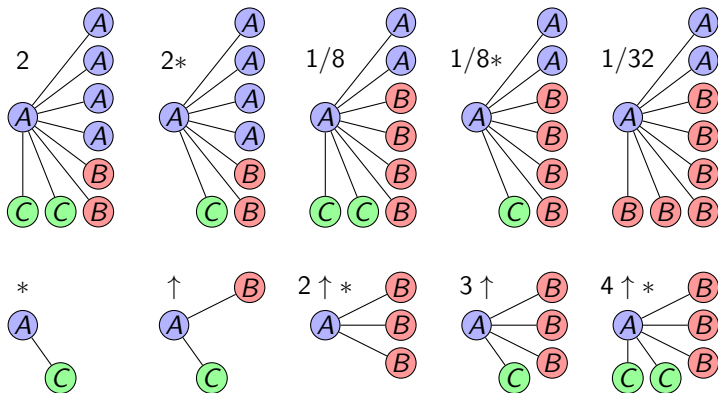
Prova usando duas induções matemáticas, uma sem folhas de cor C e outra com folhas de cor C .

Corolário: Seja G uma estrela com centro de cor B . O valor é:

$$\text{valor}(G) = -\text{valor}(-G),$$

onde $-G$ é a estrela obtida de G trocando as cores A e B .

Jogo de Dominação das Estrelas (centro de cor A ou B)



Jogo de Dominação das Estrelas (centro de cor C)

Sejam a, b, c o número de folhas de cor A, B e C , resp.

Teoremas 7, 9 e 11: Seja G uma estrela com centro de cor C . Então:

$$\text{valor}(G) = \begin{cases} -\text{valor}(-G), & \text{se } a < b \\ \uparrow^{[a-b-1]} *, & \text{se } a \geq b + 2 \text{ e } c \text{ é par} \\ \Lambda(a, b), & \text{se } a \geq b + 2 \text{ e } c \text{ é ímpar} \\ * \text{ ou } *2, & \text{se } a = b = 0 \text{ dependendo se } c \text{ é par ou ímpar} \\ * \text{ ou } *2, & \text{se } c \text{ é par dependendo se } a = b + 1 \text{ ou } a = b \\ * \text{ ou } *2, & \text{se } c \text{ é ímpar dependendo se } a = b \text{ ou } a = b + 1 \end{cases}$$

onde $\Lambda(a, b) = \{0, \uparrow^{[a-b-1]} * \mid 0, \uparrow^{[a-b-1]} *\}$ e $*2 = \{0, * \mid 0, *\}$. Além disso, $-G$ é a estrela obtida de G trocando as cores A e B .

Usamos acima a notação $\uparrow^{[n]}$ que é definida recursivamente como $\uparrow^{[0]} = 0$, $\uparrow^{[1]} = \uparrow$ e $\uparrow^{[n]} = \{\uparrow^{[n-1]} \mid *\}$ para $n \geq 2$. Sabe-se que $\uparrow^{[n+1]} > \uparrow^{[n]}$.

Jogo de Dominação das Estrelas (centro de cor C)

Sejam a, b, c o número de folhas de cor A, B e C , resp.

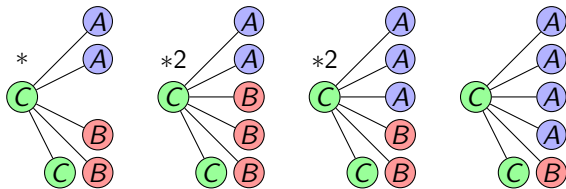
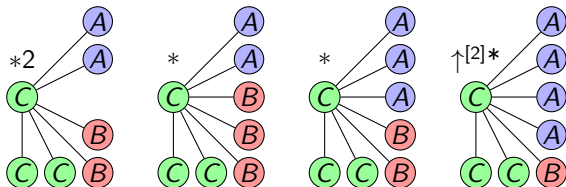
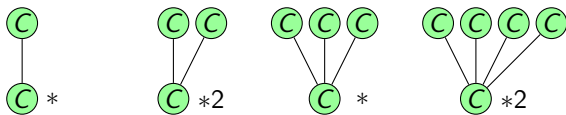
Teoremas 7, 9 e 11: Seja G uma estrela com centro de cor C . Então:

$$\text{valor}(G) = \begin{cases} -\text{valor}(-G), & \text{se } a < b \\ \uparrow^{[a-b-1]} *, & \text{se } a \geq b + 2 \text{ e } c \text{ é par} \\ \Lambda(a, b), & \text{se } a \geq b + 2 \text{ e } c \text{ é ímpar} \\ * \text{ ou } *2, & \text{se } a = b = 0 \text{ dependendo se } c \text{ é par ou ímpar} \\ * \text{ ou } *2, & \text{se } c \text{ é par dependendo se } a = b + 1 \text{ ou } a = b \\ * \text{ ou } *2, & \text{se } c \text{ é ímpar dependendo se } a = b \text{ ou } a = b + 1 \end{cases}$$

onde $\Lambda(a, b) = \{0, \uparrow^{[a-b-1]} * \mid 0, \uparrow^{[a-b-1]} *\}$ e $*2 = \{0, * \mid 0, *\}$. Além disso, $-G$ é a estrela obtida de G trocando as cores A e B .

Usamos acima a notação $\uparrow^{[n]}$ que é definida recursivamente como $\uparrow^{[0]} = 0$, $\uparrow^{[1]} = \uparrow$ e $\uparrow^{[n]} = \{\uparrow^{[n-1]} \mid *\}$ para $n \geq 2$. Sabe-se que $\uparrow^{[n+1]} > \uparrow^{[n]}$.

Jogo de Dominação das Estrelas (centro de cor C)



$\{0, \uparrow[2]* \mid 0, \uparrow[2]*\}$

Resultados técnicos sobre $\uparrow^{[n]}$ que foram usados

Usamos acima a notação $\uparrow^{[n]}$ que é definida recursivamente como $\uparrow^{[0]} = 0$, $\uparrow^{[1]} = \uparrow$ e $\uparrow^{[n]} = \{\uparrow^{[n-1]} \mid *\}$ para $n \geq 2$. Sabe-se que $\uparrow^{[n+1]} > \uparrow^{[n]}$.

Teo.2: Seja $n \geq 0$. Então $\uparrow^{[n]} < 2 \uparrow$ e $\{\uparrow^{[n]} *, \uparrow \mid \uparrow\} = 2 \uparrow *$.

Teo.3: Para todo inteiro $n \geq 1$:

$$\uparrow^{[n]} * = \{0, \uparrow^{[n-1]} * \mid 0, \uparrow^{[n+1]} *\} = \{0, \uparrow^{[n-1]} * \mid 0\}$$

$$\downarrow_{[n]} * = \{0, \downarrow_{[n+1]} * \mid 0, \downarrow_{[n-1]} *\} = \{0 \mid 0, \downarrow_{[n-1]} *\}$$

Além disso,

$$\uparrow^{[n]} * = \left\{ 0, \{0, \uparrow^{[n]} * \mid 0, \uparrow^{[n]} *\} \mid 0, \{0, \uparrow^{[n]} * \mid 0, \uparrow^{[n]} *\} \right\}$$

$$\downarrow_{[n]} * = \left\{ 0, \{0, \downarrow_{[n]} * \mid 0, \downarrow_{[n]} *\} \mid 0, \{0, \downarrow_{[n]} * \mid 0, \downarrow_{[n]} *\} \right\}$$

Se sobrar tempo: Bipartidos Completos

$K_{s,t}$ com partes S e T .

Lemas 13 a 17 + Teo.12 + Teoremas 18 a 22

Algorithm 3 Value of the game in Complete Bipartite Graphs

- 1: **procedure** VALUE-COMPLETE-BIP(complete bipartite graph G)
- 2: **if** G is a star **then return** VALUE-STAR(G)
- 3: Let S and T be the parts of G with sizes $s = |S| \geq 2$ and $t = |T| \geq 2$
- 4: **if** all vertices have color A **then return** $\max\{s, t\}$
- 5: **if** all vertices have color B **then return** $-\max\{s, t\}$
- 6: **if** color C or at least two colors appear in both S and T **then return** 0
- 7: **if** all vertices of S are colored A and all of T are colored B **then return** 0
- 8: **if** all vertices of S are colored B and all of T are colored A **then return** 0
- 9: Swap S and T if S has color C or at least two colors. *▷ That is, from now on, all vertices of S have the same color A or B and T contains the color C or at least two colors*
- 10: **if** all vertices of S are colored B **then return** $-\text{VALUE-COMPLETE-BIP}(-G)$
- 11: $a, b, c \leftarrow$ number of vertices of T colored A, B and C , resp. *▷ from now on, all vertices of S have color A*
- 12: **if** $a > b$ **then return** $a - b + \Delta(c)$
- 13: **if** $b \geq a \geq 1$ **then return** $1/2^{b-a+1} + \Delta(c)$
- 14: **if** $a = 0$ **then return** 0 or $\Gamma(b + c)$ depending on if $b + c = 2$ or $b + c > 2$

Fim

Obrigado ETC-2026 !!!