

Hull games of induced path convexities in graphs

Eurinardo Costa, Leon Almeida, Rudini Sampaio

Dept. Computação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE, Brazil

Seminários do Grupo PARGO,
Fortaleza, sexta, 22-setembro-2026, 13h

Convexidades de caminhos induzidos

Seja G um grafo e seja S um subconjunto de vértices.

Convexidade $\mathcal{C}$ sobre G :

Função de intervalo $I_{\mathcal{C}}(S)$ tal que $\forall S \subseteq S' \subseteq V(G)$:

- (i) $I_{\mathcal{C}}(\emptyset) = \emptyset$ (normalization law)
- (ii) $S \subseteq I_{\mathcal{C}}(S)$, (monotone law)
- (iii) $S \subseteq S' \implies I_{\mathcal{C}}(S) \subseteq I_{\mathcal{C}}(S')$ (extensive law)

S é $\mathcal{C}$ -convexo se e só se $I_{\mathcal{C}}(S) = S$.

Path convexities: Seja $\mathcal{P}$ uma família de caminhos sobre G .

Seja $I_{\mathcal{C}}(S)$ formado por S e todo vértice em algum caminho de $\mathcal{P}$ entre dois vértices de S .

Geodésica: $\mathcal{P}$ = caminhos mínimos [Harary et al., 1981]

Monofônica: $\mathcal{P}$ = caminhos induzidos [Jamison, 1982]

m_k : $\mathcal{P}$ = caminhos induzidos com *at least* k arestas [Dragan, 99]

ℓ_k : $\mathcal{P}$ = caminhos induzidos com *at most* k arestas ($\ell_2 = P_3^*$)
[Gutierrez et al., 2023]

Convexidades de caminhos induzidos

Seja G um grafo e seja S um subconjunto de vértices.

Convexidade $\mathcal{C}$ sobre G :

Função de intervalo $I_{\mathcal{C}}(S)$ tal que $\forall S \subseteq S' \subseteq V(G)$:

- (i) $I_{\mathcal{C}}(\emptyset) = \emptyset$ (normalization law)
- (ii) $S \subseteq I_{\mathcal{C}}(S)$, (monotone law)
- (iii) $S \subseteq S' \implies I_{\mathcal{C}}(S) \subseteq I_{\mathcal{C}}(S')$ (extensive law)

S é $\mathcal{C}$ -convexo se e só se $I_{\mathcal{C}}(S) = S$.

Path convexities: Seja $\mathcal{P}$ uma família de caminhos sobre G .

Seja $I_{\mathcal{C}}(S)$ formado por S e todo vértice em algum caminho de $\mathcal{P}$ entre dois vértices de S .

Geodésica: $\mathcal{P}$ = caminhos mínimos [Harary et al., 1981]

Monofônica: $\mathcal{P}$ = caminhos induzidos [Jamison, 1982]

m_k : $\mathcal{P}$ = caminhos induzidos com *at least* k arestas [Dragan, 99]

ℓ_k : $\mathcal{P}$ = caminhos induzidos com *at most* k arestas ($\ell_2 = P_3^*$)
[Gutierrez et al., 2023]

Convexidades de caminhos induzidos

Seja G um grafo e seja S um subconjunto de vértices.

Convexidade $\mathcal{C}$ sobre G :

Função de intervalo $I_{\mathcal{C}}(S)$ tal que $\forall S \subseteq S' \subseteq V(G)$:

- (i) $I_{\mathcal{C}}(\emptyset) = \emptyset$ (normalization law)
- (ii) $S \subseteq I_{\mathcal{C}}(S)$, (monotone law)
- (iii) $S \subseteq S' \implies I_{\mathcal{C}}(S) \subseteq I_{\mathcal{C}}(S')$ (extensive law)

S é $\mathcal{C}$ -convexo se e só se $I_{\mathcal{C}}(S) = S$.

Path convexities: Seja $\mathcal{P}$ uma família de caminhos sobre G .

Seja $I_{\mathcal{C}}(S)$ formado por S e todo vértice em algum caminho de $\mathcal{P}$ entre dois vértices de S .

Geodésica: $\mathcal{P}$ = caminhos mínimos [Harary et al., 1981]

Monofônica: $\mathcal{P}$ = caminhos induzidos [Jamison, 1982]

m_k : $\mathcal{P}$ = caminhos induzidos com *at least* k arestas [Dragan, 99]

ℓ_k : $\mathcal{P}$ = caminhos induzidos com *at most* k arestas ($\ell_2 = P_3^*$)
[Gutierrez et al., 2023]

Convexidades de caminhos induzidos

Seja G um grafo e seja S um subconjunto de vértices.

Convexidade $\mathcal{C}$ sobre G :

Função de intervalo $I_{\mathcal{C}}(S)$ tal que $\forall S \subseteq S' \subseteq V(G)$:

- (i) $I_{\mathcal{C}}(\emptyset) = \emptyset$ (normalization law)
- (ii) $S \subseteq I_{\mathcal{C}}(S)$, (monotone law)
- (iii) $S \subseteq S' \implies I_{\mathcal{C}}(S) \subseteq I_{\mathcal{C}}(S')$ (extensive law)

S é $\mathcal{C}$ -convexo se e só se $I_{\mathcal{C}}(S) = S$.

Path convexities: Seja $\mathcal{P}$ uma família de caminhos sobre G .

Seja $I_{\mathcal{C}}(S)$ formado por S e todo vértice em algum caminho de $\mathcal{P}$ entre dois vértices de S .

Geodésica: $\mathcal{P}$ = caminhos mínimos [Harary et al., 1981]

Monofônica: $\mathcal{P}$ = caminhos induzidos [Jamison, 1982]

m_k : $\mathcal{P}$ = caminhos induzidos com *at least* k arestas [Dragan, 99]

ℓ_k : $\mathcal{P}$ = caminhos induzidos com *at most* k arestas ($\ell_2 = P_3^*$)
[Gutierrez et al., 2023]

Convexidades de caminhos induzidos

Seja G um grafo e seja S um subconjunto de vértices.

Convexidade $\mathcal{C}$ sobre G :

Função de intervalo $I_{\mathcal{C}}(S)$ tal que $\forall S \subseteq S' \subseteq V(G)$:

- (i) $I_{\mathcal{C}}(\emptyset) = \emptyset$ (normalization law)
- (ii) $S \subseteq I_{\mathcal{C}}(S)$, (monotone law)
- (iii) $S \subseteq S' \implies I_{\mathcal{C}}(S) \subseteq I_{\mathcal{C}}(S')$ (extensive law)

S é $\mathcal{C}$ -convexo se e só se $I_{\mathcal{C}}(S) = S$.

Path convexities: Seja $\mathcal{P}$ uma família de caminhos sobre G .

Seja $I_{\mathcal{C}}(S)$ formado por S e todo vértice em algum caminho de $\mathcal{P}$ entre dois vértices de S .

Geodésica: $\mathcal{P}$ = caminhos mínimos [Harary et al., 1981]

Monofônica: $\mathcal{P}$ = caminhos induzidos [Jamison, 1982]

m_k : $\mathcal{P}$ = caminhos induzidos com *at least* k arestas [Dragan, 99]

ℓ_k : $\mathcal{P}$ = caminhos induzidos com *at most* k arestas ($\ell_2 = P_3^*$)
[Gutierrez et al., 2023]

Convexidades de caminhos induzidos

S é $\mathcal{C}$ -convexo se e só se $I_{\mathcal{C}}(S) = S$.

$\text{hull}_{\mathcal{C}}(S)$: menor conjunto $\mathcal{C}$ -convexo que contém S : $\text{hull}_{\mathcal{C}}(S) = I_{\mathcal{C}}^n(S)$.

S é um **hull set** se $\text{hull}_{\mathcal{C}}(S) = V(G)$.

S é um **interval set** se $I_{\mathcal{C}}(S) = V(G)$.

Path convexities: Seja $\mathcal{P}$ uma família de caminhos sobre G .

Seja $I_{\mathcal{C}}(S)$ formado por S e todo vértice em algum caminho de $\mathcal{P}$ entre dois vértices de S .

Geodésica: $\mathcal{P} =$ caminhos mínimos [Harary et al., 1981]

Monofônica: $\mathcal{P} =$ caminhos induzidos [Jamison, 1982]

m_k : $\mathcal{P} =$ caminhos induzidos com *at least* k arestas [Dragan, 99]

ℓ_k : $\mathcal{P} =$ caminhos induzidos com *at most* k arestas ($\ell_2 = P_3^*$)
[Gutierrez et al., 2023]

Graph Convexity Games

Alice e Bob se alternam selecionando vértices *jogáveis (playable)*.

Na **variante normal**, o último a jogar vence.

Na **variante misère**, o último a jogar perde.

CHG_C (*hull game*): v é jogável se $v \notin \text{hull}_C(S)$.

O jogo termina quando S é um **hull set**.

CIG_C (*interval game*): v é jogável se $v \notin I_C(S)$.

O jogo termina quando S é um **interval set**.

Resultados da literatura (apenas p/ Convexidade Geodésica):

[Buckley, Harary, 1985]: Resultados em caminhos e ciclos.

[Araújo et al., 2024]: Algoritmo p/ árvores e PSPACE-hardness de CHG_g .

[Dailly et al., 2026]: Algoritmo p/ cacti (Sprague-Grundy)

Graph Convexity Games

Alice e Bob se alternam selecionando vértices *jogáveis (playable)*.

Na variante normal, o último a jogar vence.

Na variante misère, o último a jogar perde.

CHG_C (*hull game*): v é jogável se $v \notin \text{hull}_C(S)$.

O jogo termina quando S é um *hull set*.

CIG_C (*interval game*): v é jogável se $v \notin I_C(S)$.

O jogo termina quando S é um *interval set*.

Resultados da literatura (apenas p/ Convexidade Geodésica):

[Buckley, Harary, 1985]: Resultados em caminhos e ciclos.

[Araújo et al., 2024]: Algoritmo p/ árvores e PSPACE-hardness de CHG_g .

[Dailly et al., 2026]: Algoritmo p/ cacti (Sprague-Grundy)

Graph Convexity Games

Alice e Bob se alternam selecionando vértices *jogáveis (playable)*.

Na variante normal, o último a jogar vence.

Na variante misère, o último a jogar perde.

CHG_C (*hull game*): v é jogável se $v \notin \text{hull}_C(S)$.

O jogo termina quando S é um ***hull set***.

CIG_C (*interval game*): v é jogável se $v \notin I_C(S)$.

O jogo termina quando S é um ***interval set***.

Resultados da literatura (apenas p/ Convexidade Geodésica):

[Buckley, Harary, 1985]: Resultados em caminhos e ciclos.

[Araújo et al., 2024]: Algoritmo p/ árvores e PSPACE-hardness de CHG_g .

[Dailly et al., 2026]: Algoritmo p/ cacti (Sprague-Grundy)

Graph Convexity Games

Alice e Bob se alternam selecionando vértices *jogáveis (playable)*.

Na variante normal, o último a jogar vence.

Na variante misère, o último a jogar perde.

CHG_C (hull game): v é jogável se $v \notin \text{hull}_C(S)$.

O jogo termina quando S é um ***hull set***.

CIG_C (interval game): v é jogável se $v \notin I_C(S)$.

O jogo termina quando S é um ***interval set***.

Resultados da literatura (apenas p/ Convexidade Geodésica):

[Buckley, Harary, 1985]: Resultados em caminhos e ciclos.

[Araújo et al., 2024]: Algoritmo p/ árvores e PSPACE-hardness de CHG_g.

[Dailly et al., 2026]: Algoritmo p/ cacti (Sprague-Grundy)

Graph Convexity Games

Alice e Bob se alternam selecionando vértices *jogáveis (playable)*.

Na variante normal, o último a jogar vence.

Na variante misère, o último a jogar perde.

CHG_C (hull game): v é jogável se $v \notin \text{hull}_C(S)$.

O jogo termina quando S é um **hull set**.

CIG_C (interval game): v é jogável se $v \notin I_C(S)$.

O jogo termina quando S é um **interval set**.

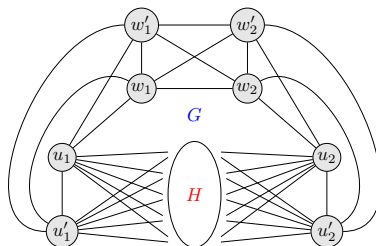
Nossos resultados:

- ▶ PSPACE-hardness de CHG_m, CHG_{ℓ_k} e CHG_g
- ▶ Algoritmos para caminhos e ciclos
- ▶ Caracterização para monofônica
- ▶ Caracterização para ℓ_k com k ímpar ou $k = 2^i - 4$ ($i \geq 3$)
- ▶ Relação forte entre CHG_{ℓ₂} e Couples-are-Forever

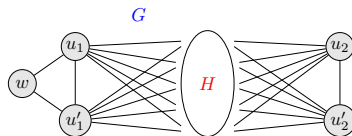
CHG_m e CHG_{ℓ_k} são PSPACE-difíceis

Redução do **Clique-Forming** game: Alice e Bob se alternam escolhendo vértices de um grafo H que devem sempre formar uma clique.

[Schaefer, 1978]: **Clique-Forming** game é PSPACE-hard.



(a) Redução CHG_{ℓ_2}



(b) Reduc. CHG_m e CHG_{ℓ_k} $p/k \geq 3$

Algoritmo para Caminhos e Ciclos

Nimber (ou Grundy value):

Togo jogo normal imparcial é associado a um número natural (*nimber*).

- ▶ Se não há jogada, o nimber é 0;
- ▶ Caso contrário, $\text{nimber} = \text{mex}\{N_1, \dots, N_\ell\}$, o mínimo excludente entre os nimbers das posições obtidas após uma jogada.



Jogo Kayles (conj. independ.): Vértices pretos não podem ser jogados.

Teorema de Sprague-Grundy:

1º jogador vence um jogo normal finito imparcial **se e só se** seu nimber é positivo. Ademais, o nimber da soma de jogos disjuntos é o bitwise-xor dos nimbers de cada jogo.

Algoritmo para Caminhos e Ciclos

Nimber (ou Grundy value):

Togo jogo normal imparcial é associado a um número natural (*nimber*).

- ▶ Se não há jogada, o nimber é 0;
- ▶ Caso contrário, $\text{nimber} = \text{mex}\{N_1, \dots, N_\ell\}$, o mínimo excludente entre os nimbers das posições obtidas após uma jogada.



Jogo Kayles (conj. independ.): Vértices pretos não podem ser jogados.

Teorema de Sprague-Grundy:

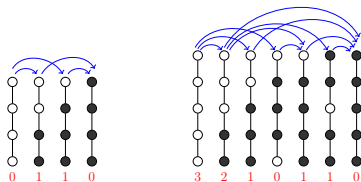
1º jogador vence um jogo normal finito imparcial **se e só se** seu nimber é positivo. Ademais, o nimber da soma de jogos disjuntos é o bitwise-xor dos nimbers de cada jogo.

Algoritmo para Caminhos e Ciclos

Nimber (ou Grundy value):

Togo jogo normal imparcial é associado a um número natural (*nimber*).

- ▶ Se não há jogada, o nimber é 0;
- ▶ Caso contrário, $\text{nimber} = \text{mex}\{N_1, \dots, N_\ell\}$, o mínimo excludente entre os nimbers das posições obtidas após uma jogada.



Jogo Kayles (conj. independ.): Vértices pretos não podem ser jogados.

Teorema de Sprague-Grundy:

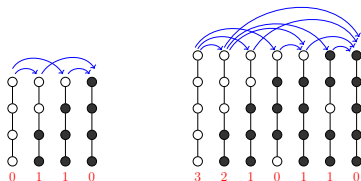
1º jogador vence um jogo normal finito imparcial **se e só se** seu nimber é positivo. Ademais, o nimber da soma de jogos disjuntos é o bitwise-xor dos nimbers de cada jogo.

Algoritmo para Caminhos e Ciclos

Nimber (ou Grundy value):

Togo jogo normal imparcial é associado a um número natural (*nimber*).

- ▶ Se não há jogada, o nimber é 0;
- ▶ Caso contrário, $\text{nimber} = \text{mex}\{N_1, \dots, N_\ell\}$, o mínimo excludente entre os nimbers das posições obtidas após uma jogada.

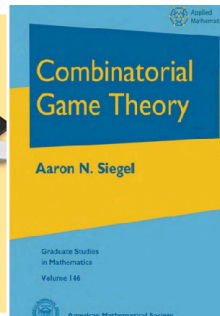
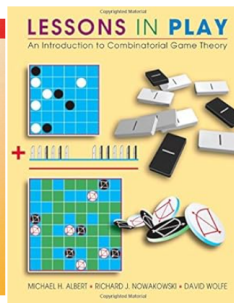
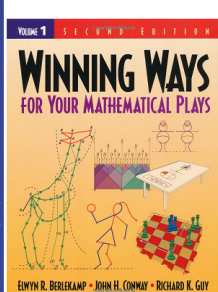
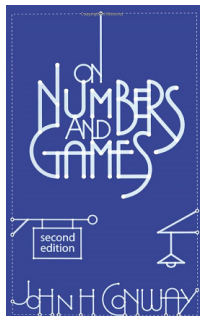


Jogo Kayles (conj. independ.): Vértices pretos não podem ser jogados.

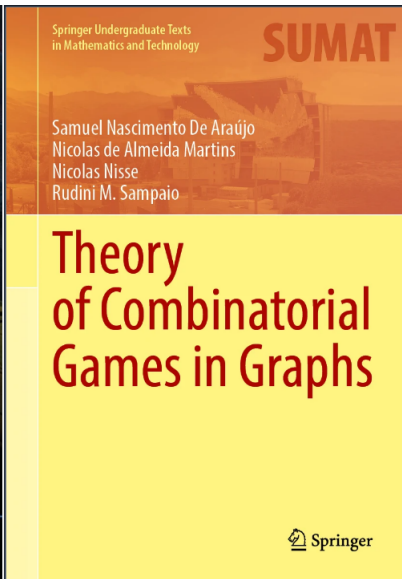
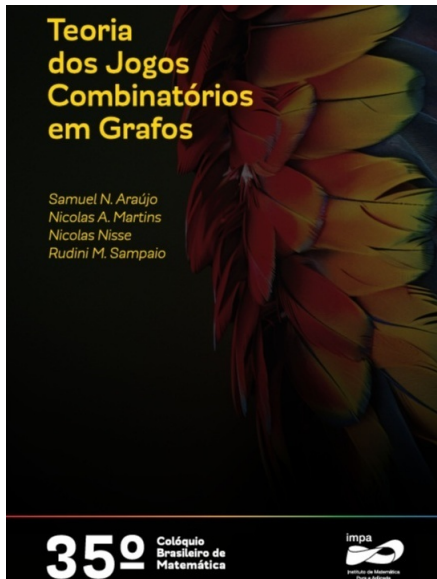
Teorema de Sprague-Grundy:

1º jogador vence um jogo normal finito imparcial **se e só se** seu nimber é positivo. Ademais, o nimber da soma de jogos disjuntos é o bitwise-xor dos nimbers de cada jogo.

Livros sobre Teoria dos Jogos Combinatórios



Livros sobre Teoria dos Jogos Combinatórios em Grafos



Algoritmo para Caminhos e Ciclos

Sejam P'_n e P''_n considerando 1 ou 2 extremidades já selecionadas.

Teorema: Seja $n \geq 1$. Então $\text{nim}_m(P''_n) = 0$ e $\text{nim}_m(P'_n) = n - 1$.
Ademais, $\text{nim}_m(P_n) = 1$, se n é ímpar, e $\text{nim}_m(P_n) = 0$, caso contrário.
Finalmente, $\text{nim}_m(C_3) = 1$ e $\text{nim}_m(C_n) = 0$ se $n \geq 4$.

Teorema: Seja $k \geq 2$. $\text{nim}_{\ell_k}(P_1) = 1$, $\text{nim}_{\ell_k}(P_2) = 0$, $\text{nim}_{\ell_k}(P'_1) = 0$,
 $\text{nim}_{\ell_k}(P'_2) = 1$ e $\text{nim}_{\ell_k}(P''_n) = 0$ p/ $n = 1, \dots, k + 1$. Para os outros,

$$\text{nim}_{\ell_k}(P_n) = \text{mex} \left\{ \text{nim}_{\ell_k}(P'_i) \oplus \text{nim}_{\ell_k}(P'_{n-i+1}) : i = 1 \dots \lceil n/2 \rceil \right\}$$

$$\text{nim}_{\ell_k}(P'_n) = \text{mex} \left\{ \text{nim}_{\ell_k}(P''_i) \oplus \text{nim}_{\ell_k}(P'_{n-i+1}) : i = 2 \dots n \right\}$$

$$\text{nim}_{\ell_k}(P''_n) = \text{mex} \left\{ \text{nim}_{\ell_k}(P''_i) \oplus \text{nim}_{\ell_k}(P''_{n-i+1}) : i = 2 \dots \lceil n/2 \rceil \right\}$$

Teorema: Seja $k \geq 2$. $\text{nim}_{\ell_k}(C_n)$ é 1 se $n = 3$, é 0 se $4 \leq n \leq 2k$, e é
 $\text{mex}\{\text{nim}_{\ell_k}(P''_{n+1})\}$, c.c. Logo, o nimber é sempre 0 ou 1.

Algoritmo para Caminhos e Ciclos

Sejam P'_n e P''_n considerando 1 ou 2 extremidades já selecionadas.

Teorema: Seja $n \geq 1$. Então $\text{nim}_m(P''_n) = 0$ e $\text{nim}_m(P'_n) = n - 1$.

Ademais, $\text{nim}_m(P_n) = 1$, se n é ímpar, e $\text{nim}_m(P_n) = 0$, caso contrário.

Finalmente, $\text{nim}_m(C_3) = 1$ e $\text{nim}_m(C_n) = 0$ se $n \geq 4$.

Teorema: Seja $k \geq 2$. $\text{nim}_{\ell_k}(P_1) = 1$, $\text{nim}_{\ell_k}(P_2) = 0$, $\text{nim}_{\ell_k}(P'_1) = 0$, $\text{nim}_{\ell_k}(P'_2) = 1$ e $\text{nim}_{\ell_k}(P''_n) = 0$ p/ $n = 1, \dots, k + 1$. Para os outros,

$$\text{nim}_{\ell_k}(P_n) = \text{mex} \left\{ \text{nim}_{\ell_k}(P'_i) \oplus \text{nim}_{\ell_k}(P'_{n-i+1}) : i = 1 \dots \lceil n/2 \rceil \right\}$$

$$\text{nim}_{\ell_k}(P'_n) = \text{mex} \left\{ \text{nim}_{\ell_k}(P''_i) \oplus \text{nim}_{\ell_k}(P'_{n-i+1}) : i = 2 \dots n \right\}$$

$$\text{nim}_{\ell_k}(P''_n) = \text{mex} \left\{ \text{nim}_{\ell_k}(P''_i) \oplus \text{nim}_{\ell_k}(P'_{n-i+1}) : i = 2 \dots \lceil n/2 \rceil \right\}$$

Teorema: Seja $k \geq 2$. $\text{nim}_{\ell_k}(C_n)$ é 1 se $n = 3$, é 0 se $4 \leq n \leq 2k$, e é $\text{mex}\{\text{nim}_{\ell_k}(P''_{n+1})\}$, c.c. Logo, o nimber é sempre 0 ou 1.

Algoritmo para Caminhos e Ciclos

Sejam P'_n e P''_n considerando 1 ou 2 extremidades já selecionadas.

Teorema: Seja $n \geq 1$. Então $\text{nim}_m(P''_n) = 0$ e $\text{nim}_m(P'_n) = n - 1$. Ademais, $\text{nim}_m(P_n) = 1$, se n é ímpar, e $\text{nim}_m(P_n) = 0$, caso contrário. Finalmente, $\text{nim}_m(C_3) = 1$ e $\text{nim}_m(C_n) = 0$ se $n \geq 4$.

Teorema: Seja $k \geq 2$. $\text{nim}_{\ell_k}(P_1) = 1$, $\text{nim}_{\ell_k}(P_2) = 0$, $\text{nim}_{\ell_k}(P'_1) = 0$, $\text{nim}_{\ell_k}(P'_2) = 1$ e $\text{nim}_{\ell_k}(P''_n) = 0$ p/ $n = 1, \dots, k + 1$. Para os outros,

$$\text{nim}_{\ell_k}(P_n) = \text{mex} \left\{ \text{nim}_{\ell_k}(P'_i) \oplus \text{nim}_{\ell_k}(P'_{n-i+1}) : i = 1 \dots \lceil n/2 \rceil \right\}$$

$$\text{nim}_{\ell_k}(P'_n) = \text{mex} \left\{ \text{nim}_{\ell_k}(P''_i) \oplus \text{nim}_{\ell_k}(P'_{n-i+1}) : i = 2 \dots n \right\}$$

$$\text{nim}_{\ell_k}(P''_n) = \text{mex} \left\{ \text{nim}_{\ell_k}(P''_i) \oplus \text{nim}_{\ell_k}(P''_{n-i+1}) : i = 2 \dots \lceil n/2 \rceil \right\}$$

Teorema: Seja $k \geq 2$. $\text{nim}_{\ell_k}(C_n)$ é 1 se $n = 3$, é 0 se $4 \leq n \leq 2k$, e é $\text{mex}\{\text{nim}_{\ell_k}(P''_{n+1})\}$, c.c. Logo, o nimber é sempre 0 ou 1.

Algoritmo para Caminhos e Ciclos

Sejam P'_n e P''_n considerando 1 ou 2 extremidades já selecionadas.

Teorema: Seja $n \geq 1$. Então $\text{nim}_m(P''_n) = 0$ e $\text{nim}_m(P'_n) = n - 1$.
Ademais, $\text{nim}_m(P_n) = 1$, se n é ímpar, e $\text{nim}_m(P_n) = 0$, caso contrário.
Finalmente, $\text{nim}_m(C_3) = 1$ e $\text{nim}_m(C_n) = 0$ se $n \geq 4$.

Teorema: Seja $k \geq 2$. $\text{nim}_{\ell_k}(P_1) = 1$, $\text{nim}_{\ell_k}(P_2) = 0$, $\text{nim}_{\ell_k}(P'_1) = 0$,
 $\text{nim}_{\ell_k}(P'_2) = 1$ e $\text{nim}_{\ell_k}(P''_n) = 0$ p/ $n = 1, \dots, k + 1$. Para os outros,

$$\text{nim}_{\ell_k}(P_n) = \text{mex} \left\{ \text{nim}_{\ell_k}(P'_i) \oplus \text{nim}_{\ell_k}(P'_{n-i+1}) : i = 1 \dots \lceil n/2 \rceil \right\}$$

$$\text{nim}_{\ell_k}(P'_n) = \text{mex} \left\{ \text{nim}_{\ell_k}(P''_i) \oplus \text{nim}_{\ell_k}(P'_{n-i+1}) : i = 2 \dots n \right\}$$

$$\text{nim}_{\ell_k}(P''_n) = \text{mex} \left\{ \text{nim}_{\ell_k}(P''_i) \oplus \text{nim}_{\ell_k}(P''_{n-i+1}) : i = 2 \dots \lceil n/2 \rceil \right\}$$

Teorema: Seja $k \geq 2$. $\text{nim}_{\ell_k}(C_n)$ é 1 se $n = 3$, é 0 se $4 \leq n \leq 2k$, e é
 $\text{mex}\{\text{nim}_{\ell_k}(P''_{n+1})\}$, c.c. Logo, o nimber é sempre 0 ou 1.

Jogo CHG_{ℓ_2} e o Jogo Couples-are-Forever de Conway

Conway's Couples-are-Forever: Há inicialmente uma pilha de moedas e uma jogada consiste em escolher uma pilha com pelo menos 3 moedas e quebrá-la em duas pilhas menores.

Seja CF_n o nimber para n moedas. Logo $CF_1 = CF_2 = 0$ e

$$CF_n = \text{mex}\{CF_k \oplus CF_{n-k} : k = 1 \dots \lfloor n/2 \rfloor\}.$$

Em aberto se nimbers CF_n são periódicos ou não [Caines et al., 1999].

Alice só perde **Couples-are-Forever** para 14 valores de n até 50 milhões:

1, 2, 5, 13, 21, 31, 47, 73, 99, 125, 151, 177, 315, 409

Alice só perde CHG_{ℓ_2} para 12 valores de n até 10 milhões:

2, 10, 18, 28, 44, 70, 96, 122, 148, 174, 312, 406

Descoberto através da OEIS (Online Encyclopedia of Integer Sequences)

Jogo CHG_{ℓ_2} e o Jogo Couples-are-Forever de Conway

Conway's Couples-are-Forever: Há inicialmente uma pilha de moedas e uma jogada consiste em escolher uma pilha com pelo menos 3 moedas e quebrá-la em duas pilhas menores.

Seja CF_n o nimber para n moedas. Logo $CF_1 = CF_2 = 0$ e

$$CF_n = \text{mex}\{CF_k \oplus CF_{n-k} : k = 1 \dots \lfloor n/2 \rfloor\}.$$

Em aberto se nimbers CF_n são periódicos ou não [Caines et al., 1999].

Alice só perde **Couples-are-Forever** para 14 valores de n até 50 milhões:

1, 2, 5, 13, 21, 31, 47, 73, 99, 125, 151, 177, 315, 409

Alice só perde CHG_{ℓ_2} para 12 valores de n até 10 milhões:

2, 10, 18, 28, 44, 70, 96, 122, 148, 174, 312, 406

Descoberto através da OEIS (Online Encyclopedia of Integer Sequences)

Jogo CHG_{ℓ_2} e o Jogo Couples-are-Forever de Conway

Conway's Couples-are-Forever: Há inicialmente uma pilha de moedas e uma jogada consiste em escolher uma pilha com pelo menos 3 moedas e quebrá-la em duas pilhas menores.

Seja CF_n o nimber para n moedas. Logo $CF_1 = CF_2 = 0$ e

$$CF_n = \text{mex}\{CF_k \oplus CF_{n-k} : k = 1 \dots \lfloor n/2 \rfloor\}.$$

Em aberto se nimbers CF_n são periódicos ou não [Caines et al., 1999].

Alice só perde **Couples-are-Forever** para 14 valores de n até 50 milhões:

1, 2, 5, 13, 21, 31, 47, 73, 99, 125, 151, 177, 315, 409

Alice só perde CHG_{ℓ_2} para 12 valores de n até 10 milhões:

2, 10, 18, 28, 44, 70, 96, 122, 148, 174, 312, 406

Descoberto através da OEIS (Online Encyclopedia of Integer Sequences)

Jogo CHG_{ℓ_2} e o Jogo Couples-are-Forever de Conway

Conway's Couples-are-Forever: Há inicialmente uma pilha de moedas e uma jogada consiste em escolher uma pilha com pelo menos 3 moedas e quebrá-la em duas pilhas menores.

Seja CF_n o nimber para n moedas. Logo $CF_1 = CF_2 = 0$ e

$$CF_n = \text{mex}\{CF_k \oplus CF_{n-k} : k = 1 \dots \lfloor n/2 \rfloor\}.$$

Em aberto se nimbers CF_n são periódicos ou não [Caines et al., 1999].

Alice só perde **Couples-are-Forever** para 14 valores de n até 50 milhões:

1, 2, 5, 13, 21, 31, 47, 73, 99, 125, 151, 177, 315, 409

Alice só perde CHG_{ℓ_2} para 12 valores de n até 10 milhões:

2, 10, 18, 28, 44, 70, 96, 122, 148, 174, 312, 406

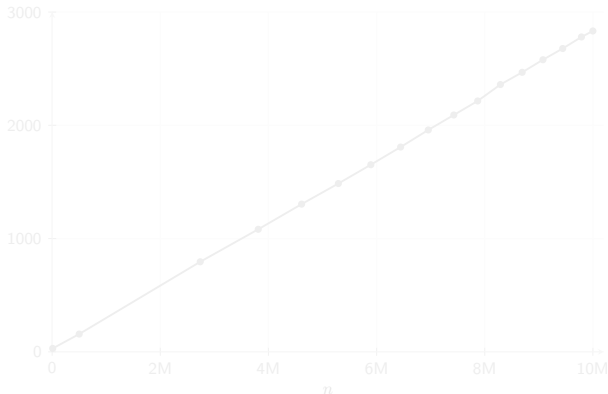
Descoberto através da OEIS (Online Encyclopedia of Integer Sequences)

Jogo CHG_{ℓ_2} e o Jogo Couples-are-Forever de Conway

Theorem: $\forall k \geq 2, n \geq 1$: $\text{nim}_{\ell_k}(P'_n) = \text{nim}_{\ell_k}(P''_{n+k})$.

Theorem: $\forall n \geq 1$: $\text{nim}_{\ell_2}(P'_n) = CF_{n+1}$; $\text{nim}_{\ell_2}(P''_{n+1}) = CF_n$

Experimentos até 10 milhões mostram que CHG_{ℓ_2} em P_n e *Couples-are-Forever* são tais que $\text{nim}_{\ell_2}(P_n) = CF_{n+3}$ com prob. 99.97%. **Num. de divergências abaixo.**

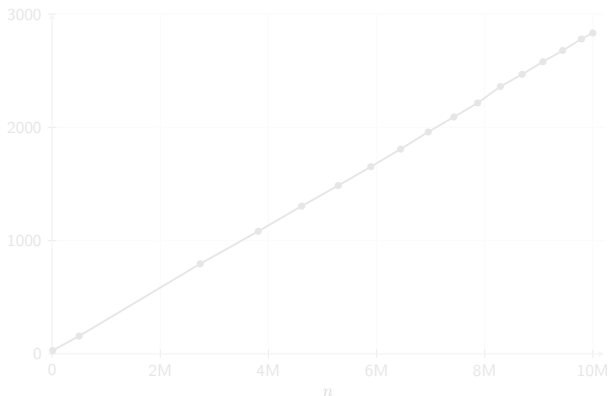


Jogo CHG_{ℓ_2} e o Jogo Couples-are-Forever de Conway

Theorem: $\forall k \geq 2, n \geq 1: \quad \text{nim}_{\ell_k}(P'_n) = \text{nim}_{\ell_k}(P''_{n+k}).$

Theorem: $\forall n \geq 1: \quad \text{nim}_{\ell_2}(P'_n) = CF_{n+1}; \quad \text{nim}_{\ell_2}(P''_{n+1}) = CF_n$

Experimentos até 10 milhões mostram que CHG_{ℓ_2} em P_n e *Couples-are-Forever* são tais que $\text{nim}_{\ell_2}(P_n) = CF_{n+3}$ com prob. 99.97%. Num. de divergências abaixo.

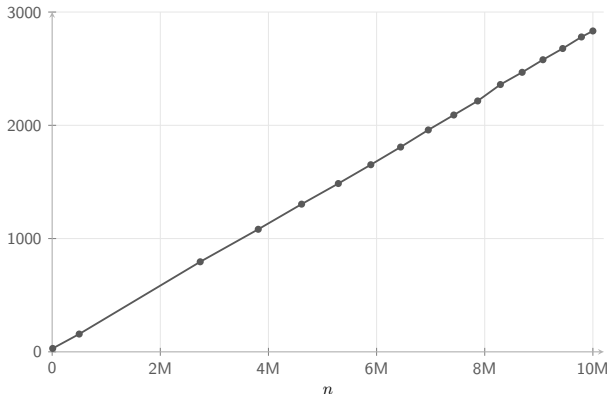


Jogo CHG_{ℓ_2} e o Jogo Couples-are-Forever de Conway

Theorem: $\forall k \geq 2, n \geq 1$: $\text{nim}_{\ell_k}(P'_n) = \text{nim}_{\ell_k}(P''_{n+k})$.

Theorem: $\forall n \geq 1$: $\text{nim}_{\ell_2}(P'_n) = CF_{n+1}$; $\text{nim}_{\ell_2}(P''_{n+1}) = CF_n$

Experimentos até 10 milhões mostram que CHG_{ℓ_2} em P_n e *Couples-are-Forever* são tais que $\text{nim}_{\ell_2}(P_n) = CF_{n+3}$ com prob. 99.97%. **Num. de divergências abaixo.**



Jogo CHG_{ℓ_k} em P_n com k ímpar

Theorem: Se $k \geq 3$ ímpar, então $\text{nim}_{\ell_k}(P'_n) = (n-1)\%(k+1)$ e

$$\text{nim}_{\ell_k}(P''_n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < k+1, \\ n\%(k+1), & \text{se } n \geq k+1, \end{cases}$$

Theorem: Seja $k \geq 3$ ímpar e $n \geq 1$. Então

$$\text{nim}_{\ell_k}(P_n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par,} \\ 1, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Logo, Alice vence o jogo CHG_{ℓ_k} **se e só se** n é ímpar.

Jogo CHG_{ℓ_k} em P_n com k ímpar

Theorem: Se $k \geq 3$ ímpar, então $\text{nim}_{\ell_k}(P'_n) = (n-1)\%(k+1)$ e

$$\text{nim}_{\ell_k}(P''_n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < k+1, \\ n\%(k+1), & \text{se } n \geq k+1, \end{cases}$$

Theorem: Seja $k \geq 3$ ímpar e $n \geq 1$. Então

$$\text{nim}_{\ell_k}(P_n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par,} \\ 1, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Logo, Alice vence o jogo CHG_{ℓ_k} **se e só se** n é ímpar.

Jogo CHG $_{\ell_k}$ em P_n com k par

As únicas sequências com k par que apresentaram periodicidade foram para $k = 2^i - 4$ com $i \geq 3$:

$$k = 4, 12, 28, 60, 124, 252, 508, 1020, \dots$$

$$\text{nim}_{\ell_k}(P''_n) : 0^{k+1}, 1, \dots, k, 0, \dots, k+1, 1, \dots, k+1, 1, \dots, k-1, 0, k+1, [1, \dots, k+1]^*$$

$$\text{nim}_{\ell_k}(P'_n) : 0, 1, \dots, k, 0, \dots, k+1, 1, \dots, k+1, 1, \dots, k-1, 0, k+1, [1, \dots, k+1]^*$$

$$\text{nim}_{\ell_k}(P_n) : [1, 0]^{k/2}, 1, 2, 2, B^b, 1, 1, 1, 2, 2, B^b, 1, 1, 3, 0, 2, [B^b, C]^*$$

onde $b = (k-4)/8$, $B = 11331122$ e $C = 11323$.

Transiente de tam. $3k+5$ e Período de tamanho $k+1$.

Theorem: Seja $k = 2^i - 4$ p/ $i \geq 3$ e $n > k$. Alice perde (resp. vence) em P_n (resp. C_n) se e só se $n = 3k+4$ (resp. $n \in \{2k+1, 5k+3\}$).

Jogo CHG_{ℓ_k} em P_n com k par

As únicas sequências com k par que apresentaram periodicidade foram para $k = 2^i - 4$ com $i \geq 3$:

$$k = 4, 12, 28, 60, 124, 252, 508, 1020, \dots$$

$$\text{nim}_{\ell_k}(P''_n) : 0^{k+1}, 1, \dots, k, 0, \dots, k+1, 1, \dots, k+1, 1, \dots, k-1, 0, k+1, [1, \dots, k+1]^*$$

$$\text{nim}_{\ell_k}(P'_n) : 0, 1, \dots, k, 0, \dots, k+1, 1, \dots, k+1, 1, \dots, k-1, 0, k+1, [1, \dots, k+1]^*$$

$$\text{nim}_{\ell_k}(P_n) : [1, 0]^{k/2}, 1, 2, 2, B^b, 1, 1, 1, 2, 2, B^b, 1, 1, 3, 0, 2, [B^b, C]^*$$

onde $b = (k-4)/8$, $B = 11331122$ e $C = 11323$.

Transiente de tam. $3k+5$ e Período de tamanho $k+1$.

Theorem: Seja $k = 2^i - 4$ p/ $i \geq 3$ e $n > k$. Alice perde (resp. vence) em P_n (resp. C_n) se e só se $n = 3k+4$ (resp. $n \in \{2k+1, 5k+3\}$).

Jogo CHG_{ℓ_k} em P_n com k par

As únicas sequências com k par que apresentaram periodicidade foram para $k = 2^i - 4$ com $i \geq 3$:

$$k = 4, 12, 28, 60, 124, 252, 508, 1020, \dots$$

$$\text{nim}_{\ell_k}(P''_n) : 0^{k+1}, 1, \dots, k, 0, \dots, k+1, 1, \dots, k+1, 1, \dots, k-1, 0, k+1, [1, \dots, k+1]^*$$

$$\text{nim}_{\ell_k}(P'_n) : 0, 1, \dots, k, 0, \dots, k+1, 1, \dots, k+1, 1, \dots, k-1, 0, k+1, [1, \dots, k+1]^*$$

$$\text{nim}_{\ell_k}(P_n) : [1, 0]^{k/2}, 1, 2, 2, B^b, 1, 1, 1, 2, 2, B^b, 1, 1, 3, 0, 2, [B^b, C]^*$$

onde $b = (k-4)/8$, $B = 11331122$ e $C = 11323$.

Transiente de tam. $3k+5$ e Período de tamanho $k+1$.

Theorem: Seja $k = 2^i - 4$ p/ $i \geq 3$ e $n > k$. Alice perde (resp. vence) em P_n (resp. C_n) se e só se $n = 3k+4$ (resp. $n \in \{2k+1, 5k+3\}$).

Jogo CHG_{ℓ_k} em P_n com k par

As únicas sequências com k par que apresentaram periodicidade foram para $k = 2^i - 4$ com $i \geq 3$:

$$k = 4, 12, 28, 60, 124, 252, 508, 1020, \dots$$

$$\text{nim}_{\ell_k}(P''_n) : 0^{k+1}, 1, \dots, k, 0, \dots, k+1, 1, \dots, k+1, 1, \dots, k-1, 0, k+1, [1, \dots, k+1]^*$$

$$\text{nim}_{\ell_k}(P'_n) : 0, 1, \dots, k, 0, \dots, k+1, 1, \dots, k+1, 1, \dots, k-1, 0, k+1, [1, \dots, k+1]^*$$

$$\text{nim}_{\ell_k}(P_n) : [1, 0]^{k/2}, 1, 2, 2, B^b, 1, 1, 1, 2, 2, B^b, 1, 1, 3, 0, 2, [B^b, C]^*$$

onde $b = (k-4)/8$, $B = 11331122$ e $C = 11323$.

Transiente de tam. $3k+5$ e Período de tamanho $k+1$.

Theorem: Seja $k = 2^i - 4$ p/ $i \geq 3$ e $n > k$. Alice perde (resp. vence) em P_n (resp. C_n) **se e só se** $n = 3k + 4$ (resp. $n \in \{2k + 1, 5k + 3\}$).

Jogo CHG $_{\ell_k}$ em P_n com $k = 2^i - 4$ e $i \geq 3$

$k = 4$: 1010.122.11122.11302.11323.11323.11323.11323.11323.11323...

$k = 12$: 101010101010.122.11331122.11122.11331122.11302.[11331122.11323]*

$k = 24$: [10]¹².122.11331122.11331122.11331122.11122.11331122.11331122.11331122.11302.
11331122.11331122.11331122.11323. 11331122.11331122.11331122.11323

$\text{nim}_{\ell_k}(P''_n) : 0^{k+1}, 1, \dots, k, 0, \dots, k+1, 1, \dots, k+1, 1, \dots, k-1, 0, k+1, [1, \dots, k+1]^*$

$\text{nim}_{\ell_k}(P'_n) : 0, 1, \dots, k, 0, \dots, k+1, 1, \dots, k+1, 1, \dots, k-1, 0, k+1, [1, \dots, k+1]^*$

$\text{nim}_{\ell_k}(P_n) : [1, 0]^{k/2}, 1, 2, 2, B^b, 1, 1, 1, 2, 2, B^b, 1, 1, 3, 0, 2, [B^b, C]^*$

onde $b = (k-4)/8$, $B = 11331122$ e $C = 11323$.

Transiente de tam. $3k+5$ e Período de tamanho $k+1$.

Theorem: Alice perde (resp. vence) em P_n (resp. C_n) com $n > k$ só para $n = 3k+4$ (resp. $n \in \{2k+1, 5k+3\}$).

Conclusão

- ▶ Introduzimos jogos de convexidade para as convexidades ℓ_k .
- ▶ Provamos que CHG_m e CHG_{ℓ_k} são PSPACE-hard para todo $k \geq 2$.
- ▶ Obtivemos algoritmos quadráticos para CHG_{ℓ_k} em P_n e C_n .
- ▶ Determinamos o vencedor de CHG_m para união disjunta de caminhos e ciclos. Alice $\Leftrightarrow$ num ímpar de C_3 e P_n ímpar.
- ▶ Determinamos o vencedor de CHG_{ℓ_k} p/ k ímpar.
- ▶ Determinamos o vencedor de CHG_{ℓ_k} p/ $k = 2^i - 4$ com $i \geq 3$.
- ▶ Relação entre CHG_{ℓ_2} e Couples-are-Forever: 99.97%.

PERGUNTAS !!!