

Teoria Algorítmica dos Jogos - 2009.2
Primeira Prova - Pós-graduação

1. Considere o seguinte jogo de 2 jogadores cujas utilidades são definidas abaixo. Se a posição (i, j) contém (a, b) , então $u_1(i, j) = a$ e $u_2(i, j) = b$. Ou seja, se os Jogadores 1 e 2 fizerem as jogadas i e j , respectivamente, então as utilidades serão a e b .

$$\begin{bmatrix} (1, 1) & (6, 2) & (2, 1) \\ (6, 1) & (7, 5) & (9, 2) \\ (2, 2) & (8, 3) & (3, 6) \end{bmatrix}$$

- (a) Algum jogador possui estratégia dominante nesse jogo?
- (b) Existe um equilíbrio puro de Nash nesse jogo? Se existe, mostre-o. Senão, explique porque não existe.
- (c) Considere as estratégias mistas $x_1 = (0.1, 0.6, 0.3)$ e $x_2 = (1/2, 1/3, 1/6)$ dos Jogadores 1 e 2, respectivamente. Qual é a utilidade esperada de cada jogador?
- (d) Mostre um equilíbrio de Nash desse jogo.

2. No livro “Algorithmic Game Theory”, explica-se como obter os valores das probabilidades em um equilíbrio de Nash dado o suporte. No caso de jogo com 2 jogadores, mostra-se que o sistema de equações é um sistema linear. Explique este fato simples. Mostre o sistema de equações a ser resolvido para o exemplo abaixo, onde A e $B = A^T$ são as utilidades dos Jogadores 1 e 2, sabendo que o suporte do Jogador 1 são as jogadas 1 e 3 e o suporte do Jogador 2 também são as jogadas 1 e 3. Resolva este sistema.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

As questões abaixo são sobre 2 jogos com n jogadores que são descritos a partir de um grafo composto por apenas dois vértices, s e t , e duas arestas entre eles, e_1 e e_2 . Em ambos os jogos, cada jogador deve escolher e_1 ou e_2 e pagar o seu custo. A diferença entre os jogos se dá pelo custo associado a cada jogada, conforme descrito nos enunciados das questões. Em ambos casos, denota-se por n_1 e n_2 os números de jogadores que escolhem e_1 e e_2 , respectivamente.

3. Aqui, o custo de e_1 é igual a n/n_1 e o custo de e_2 é $(1 + \varepsilon)/n_2$, onde $\varepsilon > 0$ é arbitrariamente pequeno.
- (a) Mostre dois equilíbrios de Nash desse jogo. Justifique.
 - (b) Mostre que não existem outros equilíbrios de Nash nesse jogo.
 - (c) Calcule o preço da anarquia e o preço da estabilidade desse jogo.
4. Aqui, o custo de e_1 é dado por uma constante igual a 1 e o custo de e_2 é igual a n_2/n . Responda os mesmos itens da questão anterior.
5. Esta questão pode ser feita com consulta, mas a consulta só é permitida após entregar as questões anteriores ao professor que está fiscalizando a prova. Discorra sobre os conceitos “preço da anarquia” e “preço da estabilidade”, com exemplos de análise de jogos que envolvam equilíbrios puros e mistos, focalizando principalmente no tema de sua apresentação da disciplina de Teoria Algorítmica dos Jogos.