

Matemática Discreta (Lista de exercícios 3)

Cada $\sqrt{\quad}$ denota um nível de dificuldade: $\sqrt{\quad}$ fácil, $\sqrt{\sqrt{\quad}}$ médio e $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\quad}}}$ difícil.

$\sqrt{\sqrt{\quad}}$ **1. (indução)** Mostre por indução que, se $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ é uma potência de 2 ($n = 2^k$, para algum $k \in \mathbb{N}$) e $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n$ e $T(1) = 1$, então $T(n) = n \log_2 n + n$.

$\sqrt{\sqrt{\quad}}$ **2. (indução)** Um *grafo* é um par $G = (V, E)$, onde V é um conjunto de elementos denominados *vértices*, e E é um conjunto de elementos denominados *arestas*, onde uma aresta é um subconjunto de V com dois vértices. Dizemos que o grafo G é *conexo* se, para todo par x e y de vértices, existe um *caminho* $\langle x = v_1, v_2, \dots, v_\ell = y \rangle$ de vértices de G tal que $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$, para todo $1 \leq i < \ell$. Mostre, por indução no tamanho de V , que, se $G = (V, E)$ é um grafo conexo, então $|E| \geq |V| - 1$.

$\sqrt{\quad}$ **3. (recorrências)** Resolva as seguintes recorrências:

(i) $a_n = a_{n-1} + 7$, $a_0 = 13$;

(ii) $a_n = 5 \cdot a_{n-1} + 3$, $a_0 = 8$;

(iii) $a_n = 5 \cdot a_{n-1} - 6 \cdot a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$;

(iv) $a_n = 4 \cdot a_{n-1} - 4 \cdot a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$;

$\sqrt{\quad}$ **4. (recorrências)** Seja $n = 3^k$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Resolva a seguinte relação de recorrência pelo método da árvore de recursão: $T(n) = T(n/3) + 17$, $T(1) = 29$.

$\sqrt{\quad}$ **5. (permutações)** Se enumerarmos todas as permutações dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 em ordem crescente, então:

1. que posição ocupa o número 42513?
2. qual número ocupa a posição 73?

$\sqrt{\quad}$ **6. (combinações)** Quantos são os subconjuntos de k elementos de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ nos quais:

- (i) a_1 aparece?
- (ii) a_1 não aparece?
- (iii) a_1 e a_2 aparecem?

$\sqrt{\sqrt{\quad}}$ **7. (combinatória)** Considere todos os subconjuntos com 5 elementos de $\{a_1, a_2, \dots, a_{12}\}$. Se ordenarmos todos esses subconjuntos por ordem crescente de índices, em quantos subconjuntos o elemento a_8 aparece na posição 3 da sua ordenação?

$\sqrt{\sqrt{\quad}}$ **8. (combinatória)** Quantas são as soluções de:

- (i) $w + x + y + z = 50$, sendo w, x, y e z números naturais?
- (ii) $w + x + y + z = 120$, sendo w, x, y e z números naturais tais que pelo menos um deles é maior que 27?

✓✓✓ **9. (combinatória)** Demonstre as seguintes afirmações:

1. $\binom{n+p+1}{p} = \sum_{r=0}^p \binom{n+r}{r}$. **Dica:** Stifel e indução em p .
2. $\binom{n+p+1}{p+1} = \sum_{r=0}^n \binom{p+r}{p}$ **Dica:** Stifel e indução em n .
3. $\binom{n+2}{p+2} = \binom{n}{p} + 2\binom{n}{p+1} + \binom{n}{p+2}$. **Dica:** Stifel duas vezes.
4. $\binom{n+3}{p+3} = \binom{n}{p} + 3\binom{n}{p+1} + 3\binom{n}{p+2} + \binom{n}{p+3}$. **Dica:** Stifel três vezes.
5. $\binom{n+4}{p+4} = \binom{n}{p} + 4\binom{n}{p+1} + 6\binom{n}{p+2} + 4\binom{n}{p+3} + \binom{n}{p+4}$. **Dica:** Stifel quatro vezes.
6. $\binom{n+k}{p+k} = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \cdot \binom{n}{p+r}$. **Dica:** Stifel k vezes ou indução em k .

✓✓ **10. (combinatória)** Determine o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{99} \quad \text{e} \quad \text{de} \quad \left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{100}$$

✓✓ **11. (probabilidade)** Considere um experimento em que uma pessoa é selecionada e se verifique o dia de seu aniversário. Considere ainda que ninguém nasceu no dia 29 de fevereiro e que cada dia do ano tem a mesma probabilidade $1/365$. Qual o número mínimo de pessoas que devemos selecionar para garantir com probabilidade maior que 60% que pelo menos duas tem aniversário no mesmo dia?

✓✓ **12. (probabilidade)** Façamos um jogo semelhante ao de Monty-Hall. Um participante deve escolher uma porta entre quatro portas possíveis. Atrás de uma delas existe um prêmio. Após fazer sua escolha, o apresentador abre uma porta não escolhida e que não possui o prêmio, e pergunta se o participante deseja mudar sua escolha. O que ele deve fazer? Justifique.

✓ **13. (grafos)** Considere o problema de Coloração de Mapas, onde países vizinhos recebam cores diferentes. Se três países fazem fronteira entre si (como Brasil, Argentina e Paraguai), então os três devem ter cores diferentes. Elabore um mapa que precise de pelo menos três cores e no qual **não** existam três países vizinhos entre si.

✓ **14. (grafos)** Dizemos que um grafo é d -regular se todos os vértices tem grau d (lembre que o grau de um vértice é o número de arestas que o contém). Desenhe todos os grafos 2-regulares com 4 vértices e todos os grafos 3-regulares com 5 vértices.

✓✓ **15. (grafos)** Seja G um grafo e seja H um subgrafo de G . Para cada um dos itens abaixo, prove ou encontre um contra-exemplo:

- $\alpha(H) \leq \alpha(G)$
- $\alpha(H) \geq \alpha(G)$
- $\omega(H) \leq \omega(G)$
- $\omega(H) \geq \omega(G)$