

Algoritmos Probabilísticos
Lista de exercícios 1

1. Elabore um algoritmo probabilístico $\Theta(n)$ que receba um inteiro k , um real $0 < \varepsilon < 1$ e um vetor A com n números reais e responda se A possui ou não um elemento majoritário (ou seja, um elemento que aparece mais do que n/k vezes). O seu algoritmo pode errar com probabilidade ε .
2. O algoritmo Bubble-Sort de ordenação troca repetidamente pares vizinhos de elementos que estejam invertidos, até que o vetor inteiro esteja ordenado. Suponha que você recebeu uma permutação aleatória de tamanho n como entrada, gerada uniformemente entre as possíveis $n!$ permutações de tamanho n . Determine o número esperado de inversões que precisam ser corrigidas pelo Bubble-Sort.
3. Calcule agora a variância do número de inversões que precisam ser corrigidas pelo Bubble-Sort.
4. Seja A um algoritmo que roda em tempo esperado $O(n^2)$ para entradas aleatórias e uniformes de tamanho n . O que a desigualdade de Markov pode nos dizer sobre as entradas de pior caso desse algoritmo?
5. Determine explicitamente (ou seja, mostre o número) a probabilidade de se obter 55 ou mais coroas ao lançar 100 vezes uma moeda. Compare este valor com o limite de Chernoff. Faça o mesmo para 550 coroas em 1000 lançamentos.
6. Seja A um algoritmo probabilístico que, com entrada x , retorna uma resposta $A(x)$ que é correta com probabilidade $p > 2/3$, onde $A(x)$ é um número natural. Calcule a probabilidade da resposta majoritária (aquela que repete mais) ser a correta quando o algoritmo é repetido n vezes. Quanto deve ser o valor n de repetições para termos uma probabilidade 99,9% de termos a resposta certa?
7. Seja $\{X_n, n \geq 0\}$ uma cadeia de Markov com estados 1, 2, 3 dado pela matriz P abaixo, onde $P_{i,j}$ (linha i e coluna j) é a probabilidade de ir do estado i para o estado j . Seja f uma função tal que $f(1) = 1$ e $f(2) = f(3) = 2$. A sequência $\{f(X_n), n \geq 0\}$ é uma cadeia de Markov? Justifique.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Considere a seguinte matriz P e responda:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2/5 & 1/2 & 1.01/10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) Esta matriz representa uma Cadeia de Markov? Justifique. Se não representar, altere-a levemente para que represente.
- (b) Seja E_i o evento de, iniciando no estado i , a cadeia de Markov retornar ao estado i em algum momento futuro. Quem é mais provável? E_2 ou E_5 ? E_2 ou E_3 ?
- (c) Iniciando no estado 6, qual o número esperado de vezes que o processo entrará nesse estado?

9. Prove que, se o estado i de uma cadeia de Markov é recorrente e não se comunica com o estado j , então $P_{i,j} = 0$.

10. Uma partícula se movimenta entre $n + 1$ estados que estão situados em um círculo. A cada passo, a partícula se move no sentido horário com probabilidade p ou no sentido anti-horário com probabilidade $1 - p$. Iniciando em um estado qualquer, calcule a probabilidade de, antes do primeiro retorno àquele estado, a partícula ter visitado todos os outros estados.

11. Um homem possui n guarda-chuvas que ele usa para ir da casa para o trabalho e vice-versa. Se chove no início do dia, ele leva um guarda-chuva da casa para o trabalho (se em casa tiver um). Se chover no fim do dia, ele leva um guarda-chuva do trabalho para casa (se no trabalho tiver um). Considerando que a probabilidade de chover é p (seja de manhã ou de noite), qual a probabilidade dele se molhar? Ou seja, qual a fração das viagens ele estará sem guarda-chuva?

12. Considerando que o cavalo do jogo de xadrez inicia num canto do tabuleiro (8×8) e realiza um movimento possível com probabilidade uniforme, calcule o número esperado de movimentos até retornar ao canto inicial.