

Fundamentos Matemáticos da Computação
Lista de exercícios 3

Cada $\surd$ denota um nível de dificuldade: $\surd$ fácil, $\surd\surd$ médio e $\surd\surd\surd$ difícil.

$\surd$ 1. (**recorrências**) Resolva as seguintes recorrências:

(i) $a_n = a_{n-1} + 7, a_0 = 13;$

(ii) $a_n = 5 \cdot a_{n-1} + 3, a_0 = 8;$

(iii) $a_n = 5 \cdot a_{n-1} - 6 \cdot a_{n-2}, a_0 = 1, a_1 = 3;$

(iv) $a_n = 4 \cdot a_{n-1} - 4 \cdot a_{n-2}, a_0 = 1, a_1 = 3;$

$\surd$ 2. (**recorrências**) Seja $n = 3^k$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Resolva a seguinte relação de recorrência pelo método da árvore de recursão: $T(n) = T(n/3) + 17, T(1) = 29$.

$\surd$ 3. (**permutações**) Se enumerarmos todas as permutações dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 em ordem crescente, então:

1. que posição ocupa o número 42513?
2. qual número ocupa a posição 73?

$\surd$ 4. (**combinações**) Quantos são os subconjuntos de k elementos de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ nos quais:

- (i) a_1 aparece?
- (ii) a_1 não aparece?
- (iii) a_1 e a_2 aparecem?

$\surd\surd$ 5. (**combinatória**) Considere todos os subconjuntos com 5 elementos de $\{a_1, a_2, \dots, a_{12}\}$. Se ordenarmos todos esses subconjuntos por ordem crescente de índices, em quantos subconjuntos o elemento a_8 aparece na posição 3 da sua ordenação?

$\surd\surd$ 6. (**combinatória**) Quantas são as soluções de:

- (i) $w + x + y + z = 50$, sendo w, x, y e z números naturais?
- (ii) $w + x + y + z = 120$, sendo w, x, y e z números naturais tais que pelo menos um deles é maior que 37?

✓✓✓ 7. (**combinatória**) Demonstre as seguintes afirmações:

1. $\binom{n+p+1}{p} = \sum_{r=0}^p \binom{n+r}{r}$. **Dica:** Stifel e indução em p .
2. $\binom{n+p+1}{p+1} = \sum_{r=0}^n \binom{p+r}{p}$ **Dica:** Stifel e indução em n .
3. $\binom{n+2}{p+2} = \binom{n}{p} + 2\binom{n}{p+1} + \binom{n}{p+2}$. **Dica:** Stifel duas vezes.
4. $\binom{n+3}{p+3} = \binom{n}{p} + 3\binom{n}{p+1} + 3\binom{n}{p+2} + \binom{n}{p+3}$. **Dica:** Stifel três vezes.
5. $\binom{n+4}{p+4} = \binom{n}{p} + 4\binom{n}{p+1} + 6\binom{n}{p+2} + 4\binom{n}{p+3} + \binom{n}{p+4}$. **Dica:** Stifel quatro vezes.
6. $\binom{n+k}{p+k} = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \cdot \binom{n}{p+r}$. **Dica:** Stifel k vezes ou indução em k .

✓✓ 8. (**combinatória**) Determine o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{99} \quad \text{e} \quad \left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{100}$$

✓✓ 9. (**probabilidade**) Considere um experimento em que uma pessoa é selecionada e se verifique o dia de seu aniversário. Considere ainda que ninguém nasceu no dia 29 de fevereiro e que cada dia do ano tem a mesma probabilidade $1/365$. Qual o número mínimo de pessoas que devemos selecionar para garantir com probabilidade maior que 60% que pelo menos duas tem aniversário no mesmo dia?

✓✓ 10. (**probabilidade**) Considerando agora que podem haver pessoas com aniversário em 29 de fevereiro, qual a probabilidade de alguém nascer em Fevereiro? E em Março? E em Abril?

✓✓ 11. (**probabilidade**) Façamos um jogo semelhante ao de Monty-Hall. Um participante deve escolher uma porta entre quatro portas possíveis. Atrás de uma delas existe um prêmio. Após fazer sua escolha, o apresentador abre uma porta não escolhida e que não possui o prêmio, e pergunta se o participante deseja mudar sua escolha. O que ele deve fazer? Justifique, calculando as probabilidades envolvidas.