

Lista 2 de Probabilidade e Processos Estocásticos

1. Qual o número esperado de lançamentos de moedas até que as duas últimas sejam Cara? E as três últimas?

2. Um modelo simples para o mercado de ações sugere que, a cada dia, uma ação com preço q aumenta o seu valor para qr , onde $r > 1$, com probabilidade p , e diminui seu valor para q/r com probabilidade $1 - p$, independentemente do seu comportamento nos dias anteriores. Suponha que em um determinado dia o preço de uma ação é igual a 1, e seja X_d o preço dessa ação após d dias. Calcule

- a. $\mathbb{E}[X_d]$
- b. $\mathbb{V}\text{ar}(X_d)$

3. Seja $\{X_n, n \geq 0\}$ uma cadeia de Markov com estados 1, 2, 3 dado pela matriz P abaixo, onde $P_{i,j}$ (linha i e coluna j) é a probabilidade de ir do estado i para o estado j . Seja $X'_n = \min\{X_n, 2\}$ e seja $X''_n = \max\{X_n, 2\}$. A sequência $\{X'_n, n \geq 0\}$ é uma cadeia de Markov? A sequência $\{X''_n, n \geq 0\}$ é uma cadeia de Markov? Justifique.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Considere a seguinte matriz P e responda:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2/5 & 1/2 & 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 4/5 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Seja E_i o evento de, iniciando no estado i , a cadeia de Markov retornar ao estado i em algum momento futuro. Quem é mais provável? E_2 ou E_5 ? E_2 ou E_3 ?

(b) Iniciando no estado 6, qual o número esperado de vezes que o processo entrará nesse estado?

5. Uma partícula se movimenta entre $n + 1$ estados que estão situados em um círculo. A cada passo, a partícula se move no sentido horário com probabilidade p ou no sentido anti-horário com probabilidade $1 - p$. Iniciando em um estado qualquer, calcule a probabilidade de, antes do primeiro retorno àquele estado, a partícula ter visitado todos os outros estados.

6. Um homem possui n guarda-chuvas que ele usa para ir da casa para o trabalho e vice-versa. Se chove no início do dia, ele leva um guarda-chuva da casa para o trabalho (se em casa tiver um). Se chover no fim do dia, ele leva um guarda-chuva do trabalho para casa (se no trabalho tiver um). Considerando que a probabilidade de chover é p (seja de manhã ou de noite), qual a probabilidade dele se molhar? Ou seja, qual a fração das viagens ele estará sem guarda-chuva?

7. Seja (X_n) uma cadeia de Markov tal que, se $X_{n-1} = k$, então $\mathbb{P}(X_n = k+1) = 1/2$ e $\mathbb{P}(X_n = k-1) = 1/2$. Considere que $X_0 = 0$. Sejam $a > b > 0 > c$ inteiros. Note que, se n é ímpar e b é par, ou vice-versa, então $\mathbb{P}(X_n = b) = 0$. Considere então que n e b são ambos pares ou ambos ímpares. Calcule a probabilidade $\mathbb{P}(X_n = b)$ de X_n ser igual a b . Dizemos que a cadeia tocou o eixo $y = a$ antes de n se $X_{n'}$ é maior ou igual a a para algum $0 < n' \leq n$. Calcule a probabilidade de $X_n = b$ e a cadeia tocar o eixo $y = a$ antes de n . Calcule a probabilidade de $X_n = b$ e a cadeia tocar o eixo $y = a$ e, após o primeiro toque no eixo $y = a$, não tocar o eixo $y = c$ (a cadeia pode tocar o eixo $y = c$ antes do primeiro toque no eixo $y = a$). **Dica:** Reflexão.

8. Seja $\{X_n, n \geq 0\}$ uma cadeia de Markov com estados $1, 2, 3, 4, 5, 6$ dada pela matriz P abaixo, onde $P_{i,j}$ (linha i e coluna j) é a probabilidade de ir do estado i para o estado j . Seja $X'_n = \min\{X_n, 4\}$ e seja $X''_n = \max\{X_n, 3\}$. A sequência $\{X'_n, n \geq 0\}$ é uma cadeia de Markov? A sequência $\{X''_n, n \geq 0\}$ é uma cadeia de Markov? Justifique.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2/5 & 1/2 & 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \textcolor{red}{1/3} & 0 & 0 & 0 & \textcolor{red}{2/3} & 0 \\ 0 & 4/5 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \end{bmatrix}$$

9. Sobre a cadeia da questão anterior, responda:

- (a) Seja E_i o evento de, iniciando no estado i , a cadeia de Markov retornar ao estado i em algum momento futuro. Quem é mais provável? E_2 ou E_5 ? E_2 ou E_3 ?
- (b) Iniciando no estado 6, qual o número esperado de vezes que o processo entrará nesse estado?

10. Uma peça do jogo de xadrez no tabuleiro padrão (8x8) sai de uma quina e se move aleatoriamente (respeitando os movimentos da peça). Qual o número esperado de movimentos até voltar para a mesma quina em que havia iniciado, considerando as peças dos itens abaixo?

- (a) Cavalo
- (b) Bispo
- (c) Torre
- (d) Rainha

11. Seja $0 < p < 1$ um real fixo. Sejam $X_1, X_2, X_3 \dots$ variáveis aleatórias independentes tais que $X_n \sim \text{Binomial}(n, p)$. Mostre que as seguintes afirmações ocorrem com probabilidade 1

- (a) Um número infinito dos X_n assume valor exatamente igual a np .
- (b) Somente um número finito dos X_n assume valor menor ou igual a $np/2$.