

Matemática Discreta
Lista de exercícios 2

Cada $\surd$ denota um nível de dificuldade: $\surd$ fácil, $\surd\surd$ médio e $\surd\surd\surd$ difícil.

$\surd\surd$ 1. (**indução**) O Jogo da Torre de Hanói possui 3 hastes A, B e C com n discos de tamanhos diferentes empilhados na haste A (discos maiores embaixo de discos menores). O objetivo é levar todos os discos (um por um) da haste A até a haste B, usando a haste C como auxiliar, sem deixar um disco maior sobre um disco menor. Prove por indução que o menor número de movimentos para levar n discos da haste A até a haste B da Torre de Hanói, usando a haste C como auxiliar, é $2^n - 1$.

$\surd\surd$ 2. (**indução**) Mostre por indução que, se $n \in \mathbb{N}^*$ é uma potência de 2 ($n = 2^k$, para algum $k \in \mathbb{N}$) e $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n$ e $T(1) = 1$, então $T(n) = n \log_2 n + n$.

$\surd\surd$ 3. (**relações**) Seja $\mathcal{S}$ a relação que consiste de todos os pares (x, y) de números reais tais que $((y - 1)^2 - 17)^2 + ((x + 2)^2 - 17)^2 \leq 64$. Determine $\text{Dominio}(\mathcal{S})$ e $\text{Imagem}(\mathcal{S})$.

$\surd\surd$ 4. (**relações**) Sejam R uma relação binária e A e B conjuntos. Por simplicidade de notação, escrevemos $R[X]$, onde X é um conjunto, para indicar $R[X, X]$. Prove ou construa um contra-exemplo:

- | | |
|--|--|
| (a) $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$. | (d) $R[A \cap B] \supseteq R[A] \cap R[B]$. |
| (b) $R[A \cup B] \subseteq R[A] \cup R[B]$. | (e) $R[A \cup B] \supseteq R[A] \cup R[B]$. |
| (c) $R[A - B] \subseteq R[A] - R[B]$. | (f) $R[A - B] \supseteq R[A] - R[B]$. |

$\surd\surd$ 5. (**relação de equivalência**) Mostre que se R é uma relação reflexiva e transitiva, então $R \cap R^{-1}$ é uma relação de equivalência, onde $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$.

$\surd\surd\surd$ 6. (**relação de equivalência**) Sejam A um conjunto e $R \subseteq A \times A$. Seja ainda

$$S = \{(a, a') \mid \exists a'' \in A, (a, a'') \in R \wedge (a'', a') \in R\}.$$

Prove ou dê um contra-exemplo:

- (a) se R é uma relação de equivalência, então S também o é.
(b) se S é uma relação de equivalência, então R também o é.

$\surd$ 7. (**ordem parcial**) Sejam A um conjunto e $R \subseteq A \times A$ uma ordem parcial em A . Mostre que se $B \subseteq A$, então $R \cap (B \times B)$ é uma ordem parcial em B .

$\surd\surd$ 8. (**ordem parcial**) Considere a relação $R = \{(S_1, S_2) : S_1, S_2 \subsetneq \{a, b, c, d\} \text{ e } S_1 \subseteq S_2\}$.

- (a) Prove que R é uma **ordem parcial**.
- (b) Faça o Diagrama de Hasse de R .
- (c) Determine a **altura** e a **largura** de R .
- (d) R tem elemento mínimo? minimal? máximo? maximal? Se sim, quais?

✓✓ **9. (ordem parcial)** Dizemos que uma palavra P_1 é subpalavra de outra palavra P_2 se P_1 aparece sequencialmente (sem pular letras) em P_2 . Denotamos isso por $P_1 \sqsubset P_2$. Por exemplo, $ana \sqsubset banana$, mas $aa \not\sqsubset banana$. Seja $\mathcal{R}$ a relação dos pares (P_1, P_2) tais que $P_1 \sqsubset P_2$. Além disso, P_1 e P_2 devem ser subpalavras de ARARAQUARA com no máximo 8 letras.

- (a) Prove que $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem parcial.
- (b) Faça o Diagrama de Hasse de $\mathcal{R}$.
- (c) $\mathcal{R}$ tem elemento mínimo? minimal? máximo? maximal? Se sim, quais?
- (d) Calcule a largura e o comprimento de $\mathcal{R}$

✓✓ **10. (relação de equivalência)** Seja $\mathcal{R}$ a relação dos pares (P_1, P_2) tais que P_1 e P_2 são subpalavras de ARARAQUARA com no máximo 8 letras e que tem o mesmo tamanho.

- (a) Prove que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência.
- (b) Quantas classes de equivalência $\mathcal{R}$ possui?
- (c) Qual o tamanho da maior classe de equivalência?

✓ **11. (funções)** Dada um função bijetiva qualquer $F : A \rightarrow A$ em um conjunto A , determine qual é a função $(F \circ F) \circ ((F^{-1} \circ F^{-1}) \circ F)$. Justifique.

✓✓ **12. (funções)** Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções tais que a composta $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é bijetora. Prove que f injetora e que g é sobrejetora.

✓✓✓ **13. (funções)** Sejam f e g as funções

$$f(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} \qquad g(x) = 3^x.$$

- (a) Determine a função $f^{-1}(x)$ (a função **inversa** de f).
- (b) Determine a função $h(x) = g(f^{-1}(x))$ (**composta** de g com f^{-1}).

✓✓ **14. (funções)** Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função $f(x) = x^2 - 8x + 15$.

- (a) Explique porque f não é **injetora**. Explique porque f não é **sobrejetora**.
- (b) Mude o mínimo possível o domínio e o contra-domínio para que f fique **bijetora**.

(c) Com as mudanças do item (b), determine a função **inversa** f^{-1} de f .

✓✓ **15. (somatório)** Resolva os seguintes somatórios, sem usar resultados de somatórios já vistos nas aulas:

$$(a) \sum_{k=1}^n k \quad (b) \sum_{k=1}^n k^2 \quad (c) \sum_{k=1}^n k^3 \quad (d) \sum_{k=1}^n (4k^3 + 6k^2 + 2k - 1)$$

✓✓✓ **16. (somatório)** Prove os seguintes somatórios, sem usar indução matemática, mostrando em detalhes todas as contas. Dica: soma telescópica + resultados obtidos na questão anterior.

$$(a) \sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \quad (b) \sum_{k=1}^n k^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$$

✓✓✓ **17. (somatório)** Calcule os somatórios abaixo. **Dica:** somas telescópicas do tipo $\sum_{k=1}^n \left(\frac{f(k+1)}{k+1} - \frac{f(k)}{k} \right)$ ou $\sum_{k=1}^n \left(\frac{f(k+1)}{(k+1)^2} - \frac{f(k)}{k^2} \right)$.

$$(a) \sum_{k=1}^n \frac{5^k \cdot (4k-1)}{k \cdot (k+1)}$$

$$(b) \sum_{k=1}^n \frac{2^k \cdot (k^2 - 2k - 1)}{k^2 \cdot (k+1)^2}$$

✓✓✓ **18. (somatório)** Calcule o somatório abaixo.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^j k$$