

Matemática Discreta
Lista de exercícios 3

Cada $\surd$ denota um nível de dificuldade: $\surd$ fácil, $\surd\surd$ médio e $\surd\surd\surd$ difícil.

$\surd\surd$ 1. (**recorrências**) Resolva as seguintes recorrências:

- (a) $a_n = a_{n-1} + 7$, $a_0 = 13$;
- (b) $a_n = 5 \cdot a_{n-1} + 3$, $a_0 = 8$;
- (c) $a_n = 5 \cdot a_{n-1} - 6 \cdot a_{n-2}$, $a_0 = 2$, $a_1 = 5$;
- (d) $a_n = 4 \cdot a_{n-1} - 4 \cdot a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$;
- (e) $a_n = 5 \cdot a_{n-1} - 6 \cdot a_{n-2} + 6$, $a_0 = 5$, $a_1 = 8$;

$\surd\surd$ 2. (**recorrências**) Seja $n = 3^k$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Resolva a seguinte relação de recorrência: $T(n) = T(n/3) + 17$, $T(1) = 29$.

$\surd\surd\surd$ 3. (**recorrências**) Assumindo que n é uma potência de 2, resolva a seguinte relação de recorrência e depois prove a corretude por indução: $T(1) = 2$, $T(2) = 6$ e para $n > 2$:

$$T(n) = 6 \cdot T(n/2) - 8 \cdot T(n/4), \text{ se } n > 2$$

(**Dica:** é possível obter uma recorrência de 2ª ordem, substituindo n por 2^k)

$\surd$ 4. (**inclusão e exclusão**) Num grupo de 155 alunos, 84 têm a letra A no nome, 100 têm a letra E, 30 têm O, 54 têm A e E, 15 têm A e O, 8 tem E e O, e 3 têm as letras A, E e O.

- (a) Quantos alunos têm E, mas não têm A nem O?
- (b) Quantos alunos têm as letras A e O, mas não tem E?
- (c) Use o Princípio da Inclusão e Exclusão para calcular quantos alunos não têm nenhum das 3 letras?

$\surd\surd$ 5. (**inclusão/exclusão**) Quantos inteiros de 1 a 2100 não são divisíveis por 2, 3, 5 e 7?

$\surd\surd$ 6. (**inclusão/exclusão**) No final do ano, N amigos vão fazer uma confraternização de amigo secreto. Ao fazer o sorteio do amigo secreto, caso alguém tenha recebido o seu próprio nome, ele deve trocar por outro. **Dica:** permutação caótica.

- (a) Dê uma fórmula em função de N para a probabilidade exata de não haver nenhuma troca.
- (b) Calcule o valor dessa probabilidade para $N \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- (c) Dê uma estimativa razoável (ou seja, um valor numérico que não depende de N) para esta probabilidade para N grande.

$\surd\surd$ 7. (**casa dos pombos**) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \subseteq \{0, 1, \dots, 2n-1\}$. Mostre que se $|A| = n+2$, então existem $a \in A$ e $a' \in A$, $a \neq a'$, tais que $a + a' = 2n$.

$\surd\surd\surd$ 8. (**casa dos pombos**) Sejam $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, e $A \subseteq \mathbb{N}$. Prove cada uma das afirmações a seguir.

- (a) se $|A| = n+1$, então existem $a \in A$ e $a' \in A$, $a \neq a'$, tais que $a - a'$ é divisível por n .

(b) se $|A| = n + 2$, então existem $a \in A$ e $a' \in A$, $a \neq a'$, tais que $(a - a'$ é divisível por $2n)$ ou $(a + a'$ é divisível por $2n)$.

Observe que $a - a'$ é divisível por n se e somente se $a \bmod n = a' \bmod n$, e que $a + a'$ é divisível por n se e somente se $(a \bmod n) + (a' \bmod n) = n$.

✓✓ **9. (casa dos pombos)** Mostre que, em todo grupo de $n \geq 2$ pessoas, há duas pessoas com o mesmo número de amigos no grupo. Considere que a relação “ser amigo” é simétrica mas não é reflexiva.

✓ **10. (permutações)** Se enumerarmos todas as permutações dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 em ordem crescente, então:

(a) que posição ocupa o número 42513?

(b) qual número ocupa a posição 73?

✓ **11. (combinações)** Quantos são os subconjuntos de k elementos de $\{1, 2, \dots, n\}$ nos quais:

(a) 1 aparece?

(b) 1 não aparece?

(c) 1 e 2 aparecem?

✓✓ **12. (combinatória)** Considere todos os subconjuntos com 5 elementos de $\{1, 2, \dots, 12\}$. Se ordenarmos todos esses subconjuntos por ordem crescente de índices, em quantos subconjuntos o elemento 8 aparece na posição 3 da sua ordenação?

✓✓ **13. (combinatória)** Considere o sistema $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100$, com $x_1, \dots, x_5$ naturais, sendo pelo menos um deles **maior ou igual** a uma constante C . Calcule o número de soluções do sistema para os seguintes valores de $C \in \{20, 23, 26, 34, 50, 51, 99, 100\}$.

✓✓✓ **14. (combinatória)** Uma roleta tem N setores e devemos pintá-los de modo que setores vizinhos tenham cores diferentes. Existem k cores disponíveis. **Dica: slides da disciplina.**

(a) De quantos modos podemos pintar a roleta considerando que os setores tem tamanhos diferentes?

(b) De quantos modos podemos pintar a roleta considerando que os setores são idênticos?

✓✓✓ **15. (combinatória)** Demonstre as seguintes afirmações:

(a) $\binom{n+p+1}{p} = \sum_{r=0}^p \binom{n+r}{r}$. **Dica:** Stifel e indução em p .

(b) $\binom{n+p+1}{p+1} = \sum_{r=0}^n \binom{p+r}{p}$ **Dica:** Stifel e indução em n .

(c) $\binom{n+2}{p+2} = \binom{n}{p} + 2\binom{n}{p+1} + \binom{n}{p+2}$. **Dica:** Escolher $p + 2$ pessoas entre n homens e 2 mulheres.

(d) $\binom{n+k}{p+k} = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \cdot \binom{n}{p+r}$. **Dica:** Escolher $p + k$ pessoas entre n homens e k mulheres.

✓✓ **16. (combinatória)** Determine o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{99} \quad \text{e} \quad \text{de} \quad \left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{100}$$

✓✓ **17. (probabilidade)** Façamos um jogo semelhante ao de Monty-Hall. Um participante deve escolher uma porta entre 4 portas possíveis. Atrás de uma delas existe um prêmio. (a) Após fazer sua escolha, o apresentador abre 1 porta não escolhida e que não possui o prêmio, e pergunta se o participante deseja mudar sua escolha. O que ele deve fazer? Justifique. (b) E se houvessem 5 portas e o apresentador abrisse duas portas sem o prêmio? Justifique.

✓✓ **18. (probabilidade)** Um experimento consiste em lançar 5 dados. Dizemos que o experimento foi um sucesso se pelo menos 2 dados tiveram valor 6. Repetimos experimentos até obter um sucesso. (a) Qual a probabilidade de ter sucesso já no 1º experimento? (b) Qual a probabilidade de ter sucesso apenas no 2º experimento? (c) Qual o número esperado de experimentos para se obter o 1º sucesso?