

Avaliação de desempenho de fundos por POD: uma análise combinatorial

Rudini Menezes Sampaio
Andre Cury Maiali

Este artigo apresenta a formalização matemática do conceito de portfolio opportunity distribution (POD), bem como descreve uma implementação computacional capaz de avaliar o desempenho de administradores de fundos de investimento, por meio de análise de concentrações de carteiras no plano risco-retorno, e mostra a dificuldade intrínseca em atingir alocações ótimas, isto é, a fronteira eficiente, devido às restrições dos fundos.

Introdução

Os modelos de avaliação diferem entre si no referencial. É em relação a esse aspecto que seu desempenho é medido. Um dos métodos para avaliar administradores de fundos consiste em comparar o comportamento da carteira montada pelo administrador com algum índice de mercado, como o Ibovespa. Outra possibilidade é confrontar o portfólio do administrador com carteiras similares estruturadas por diferentes gestores.

Entretanto, existem argumentos contundentes contra essas formas de avaliação. Um exemplo disso é que, se determinado *benchmark* utilizado na avaliação de um administrador tem desempenho ruim, é possível concluir equivocadamente que o administrador teve bom desempenho. Para discussão detalhada desses problemas, de-

vem ser consultados os artigos de Surz (1994 e 1997).

O conceito de POD está sendo empregado na área econômica para avaliar administradores de fundos de maneira precisa, justa e consistente. Recentemente desenvolvida, essa metodologia combina os aspectos desejáveis dos modelos citados.

A POD permite comparar a atuação de determinada carteira com a de todas as outras que poderiam ter sido escolhidas, ou seja, todas as oportunidades que o administrador tinha no momento em que a escolheu.

Assim, o referencial para avaliação torna-se o conjunto de todos os possíveis desempenhos que ele poderia ter obtido dadas as possibilidades de alocação de recursos. Dessa forma, o administrador passa a ser analisado em relação a padrões que ele



realmente poderia ter sido capaz de atingir. Além disso, a POD elimina a necessidade de *benchmarks*, sendo, portanto, de grande utilidade para avaliar fundos compostos de poucos similares no mercado financeiro ou que não tenham *benchmarks* para comparação.

Portfolio Opportunity Distribution (POD)

POD é o nome dado à estimação da função densidade de probabilidade no plano risco-retorno, resultante da geração de todas as possibilidades de carteiras estruturadas a partir de certos ativos.

Para construção da POD, são realizadas centenas de milhares de simulações de possíveis portfólios construídos de acordo com o universo de ativos disponível e com as regras de alocação de recursos do próprio gestor. A POD obtida fornece sistema de avaliação que mostra claramente todas as oportunidades que poderiam ter sido exploradas. Além disso, provê *benchmarks*, que podem ser sua média, mediana ou moda, e permite que sejam definidas regiões no plano risco-retorno que determinem diferentes graus de sucesso ou fracasso do administrador. O *benchmark* natural do gestor é a mediana dos retornos de uma POD. A diferença entre o retorno real e essa mediana corresponde ao valor agregado ou subtraído pela forma particular do gestor em alocar recursos.

Por exemplo, com a POD construída, o administrador pode verificar, em porcentagem, as carteiras que obtiveram maior rendimento (maior retorno e menor risco) ou menor rendimento (menor retorno e maior risco). Com isso, é possível avaliar o gestor de modo consistente.

Modelagem matemática

Os requisitos de entrada e as variáveis utilizadas para a construção da POD são:

- séries de preços dos ativos pertencentes ao universo disponível ao gestor;
- porcentagens mínimas e máximas da riqueza a ser aplicada nos ativos;
- intervalo de tempo referente à periodicidade da análise (diária, mensal):

t = instante de tempo;

C_i^t = valor da carteira i no instante de tempo t ;

A_j^t = preço do ativo j no início do instante de tempo t ;

$q_{i,j}^t$ = quantidade do ativo j na carteira i no instante de tempo t ;

$w_{i,j}^t$ = fração do total da carteira i aplicada no ativo j no instante de tempo t .

Construção das carteiras

Estratégia 1 – quantidades constantes

A quantidade $q_{i,j}^t$ de cada um dos ativos que compõem a carteira permanece constante ao longo do tempo.

Nesse caso, basta ser montada uma carteira no instante inicial $t = 0$ com determinadas quantidades $q_{i,j}^0$ de cada um dos ativos e manter essa composição inalterada. Portanto:

$$q_{i,j}^{t+1} = q_{i,j}^t = q_{i,j}^0$$

Certamente, as frações do valor total da carteira aplicadas em cada um dos ativos não permanecem constantes se os preços dos ativos mudarem do instante t para o instante $t + 1$. De fato:

$$w_{i,j}^t = \frac{q_{i,j}^t \times A_j^t}{\sum_j q_{i,j}^t \times A_j^t}, w_{i,j}^{t+1} = \frac{q_{i,j}^{t+1} \times A_j^{t+1}}{\sum_j q_{i,j}^{t+1} \times A_j^{t+1}} = \frac{q_{i,j}^t \times A_j^{t+1}}{\sum_j q_{i,j}^t \times A_j^{t+1}} \neq w_{i,j}^t$$

A quantidade inicial $q_{i,j}^0$ de cada um dos ativos na carteira i é determinada por meio da fração inicial do valor total da carteira a ser aplicada em cada ativo. Assim:

$$w_{i,j}^0 = \frac{q_{i,j}^0 \times A_j^0}{\sum_j q_{i,j}^0 \times A_j^0} \Rightarrow q_{i,j}^0 = \frac{w_{i,j}^0 \times \sum_j q_{i,j}^0 \times A_j^0}{A_j^0} = \frac{w_{i,j}^0 \times C_i^0}{A_j^0}$$

Estratégia 2 – frações constantes

A fração do valor total da carteira aplicada em cada um dos ativos deve ser a mesma no início de cada instante de tempo. Isso exige que a composição da carteira seja alterada no início de cada instante de tempo por meio de realocações dos ativos, podendo eventualmente envolver custos de transação.

Nessa estratégia, são necessárias realocações que devem acontecer apenas no início de cada instante de tempo t . Assim, em $t + 1$ as quantidades de cada ativo na carteira devem ser alteradas de modo que a seguinte condição de contorno seja obedecida:

$$w_{i,j}^{t+1} = \frac{q_{i,j}^{t+1} \times A_j^{t+1}}{\underbrace{\sum_j q_{i,j}^{t+1} \times A_j^{t+1}}_{C_i^{t+1}}} = w_{i,j}^t = \frac{q_{i,j}^t \times A_j^t}{\underbrace{\sum_j q_{i,j}^t \times A_j^t}_{C_i^t}}$$

Além disso, o rebalanceamento implica custo transacional. Supondo que este possa ser expresso por $\alpha_j \times A_j^{t+1}$ por unidade do ativo j negociada, o custo de rebalancear cada ativo j é de:

$$|q_{i,j}^{t+1} - q_{i,j}^t| \times \alpha_j \times A_j^{t+1}$$

Assim, é possível relacionar o valor total da carteira imediatamente antes do rebalanceamento com o valor total dessa carteira imediatamente após o rebalanceamento por meio da expressão:

$$\sum_j q_{i,j}^{t+1} \times A_j^{t+1} = \sum_j q_{i,j}^t \times A_j^{t+1} - \sum_j |q_{i,j}^{t+1} - q_{i,j}^t| \times \alpha_j \times A_j^{t+1}$$

As novas quantidades dos ativos na carteira rebalanceada são tais que:

$$w_{i,j}^{t+1} = \frac{q_{i,j}^{t+1} \times A_j^{t+1}}{\sum_j q_{i,j}^{t+1} \times A_j^{t+1}} = \frac{q_{i,j}^{t+1} \times A_j^{t+1}}{\sum_j q_{i,j}^t \times A_j^{t+1} - \sum_j |q_{i,j}^{t+1} - q_{i,j}^t| \times \alpha_j \times A_j^{t+1}} = w_{i,j}^t$$

Para cada $t = 1, 2, \dots, T$, fazendo j variar na equação anterior de 1 a N , obtém-se um conjunto de N equações não-lineares com N incógnitas: $q_{i,j}^1, j \leq N$.

Entretanto, uma dessas equações é redundante, pois pode ser obtida por meio de combinação linear das demais. Assim, realmente se dispõe de um sistema de $N - 1$ equações a N incógnitas. A equação que torna o sistema possível e determinado é aquela que define o valor total da carteira inicial:

$$C_i^0 = \sum_j q_{ij}^0 \times A_j^0$$

A evolução da carteira é definida pelos q_{ij}^t , encontrados a partir dos $w_{i,j}^0$ dados, usando-se o seguinte conjunto de equações recursivas:

$$\frac{q_{i,j}^{t+1} \times A_j^{t+1}}{\sum_j q_{i,j}^t \times A_j^{t+1} - \sum_j |q_{i,j}^{t+1} - q_{i,j}^t| \times \alpha_j \times A_j^{t+1}} = w_{i,j}^0$$

$$w_{i,j}^0 = \frac{q_{i,j}^0 \times A_j^0}{\sum_j q_{i,j}^0 \times A_j^0} = \frac{q_{i,j}^0 \times A_j^0}{C_i^0}$$

Sabendo como a carteira evolui em cada estratégia, é possível montar diferentes carteiras a partir de diferentes participações $w_{i,j}^0$ de cada ativo j nessas carteiras e estudar a evolução de seu valor C_i^t . Deve-se construir uma série com os retornos de cada uma a fim de serem calculados o retorno médio e o risco.

Análise estatística das carteiras

As variáveis cuja função densidade de probabilidade se pretende estimar são:

- retorno médio da carteira C_i no prazo T ;
- risco da carteira C_i no prazo T .

O retorno médio da carteira C_i no prazo T é dado por:

$$R_C = \frac{\sum_{t=1}^T r_{C_i}^t}{T} = \frac{\sum_{t=1}^T \ln \frac{C_i^t}{C_i^{t-1}}}{T} = \frac{\ln \left(\frac{C_i^T}{C_i^0} \right)}{T} = \ln \left(\frac{C_i^T}{C_i^0} \right)^{1/T}$$

O risco da carteira C_i no prazo T é dado por:

$$\sigma_C = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T (r_{C_i}^t - R_C)^2}{T}}$$

Para o caso em que w_{ij} assume sempre o mesmo valor (estratégia 2), pode-se também calcular o risco da carteira por meio da seguinte expressão:

$$\sigma_{r_{C_i}^k}^2 = [w_{i1} \quad \dots \quad w_{iN}] \times \begin{bmatrix} \sigma_{r_{A1}}^2 & \dots & \sigma_{r_{A1}r_{AN}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{r_{AN}r_{A1}} & \dots & \sigma_{r_{AN}}^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_{i1} \\ \dots \\ w_{iN} \end{bmatrix}$$

onde: $\sigma_{r_{A_i} r_{A_j}} = E(r_{A_i}^t \times r_{A_j}^t) - E(r_{A_i}^t) \times E(r_{A_j}^t)$.

Note-se que os valores de retorno da carteira e dos ativos são calculados levando-se em conta a periodicidade da análise definida, ou seja, esses retornos devem ser estimados com base nos preços de fechamento dos ativos a cada dia, mês, semana.

Análise combinatorial das carteiras

Sejam $pmín(k)$ e $pmáx(k)$, respectivamente, a porcentagem mínima e a máxima do total de recursos (riqueza) a ser aplicada no ativo k ; $expo(k) = pmáx(k) - pmín(k)$;

$Sm\ n = \sum_{k=1}^n pm\ n(k)$ e $Sm\ A\& = \sum_{k=1}^n pm\ A\&(k)$, para a existência de carteiras possíveis, $Sm\ n \leq 100 \leq Sm\ A\&$.

A geração das possíveis carteiras é feita por meio de discretização, implementada por uma variável denominada delta. Isso significa que a variação dos ativos em cada carteira deve ser múltiplo de delta. Por exemplo, $\delta = 0,5\%$ significa que, na carteira, as composições do ativo k irão variar de $pmín(k)\%$ até $pmáx(k)\%$ com passo de $0,5\%$.

Para determinar um valor bom para delta, é necessário calcular a explosão combinatorial do número de carteiras possíveis, contando-se os limites inferiores e superiores dos ativos. Utilizando a técnica das funções geratrizes da combinatória moderna, verifica-se que o número de carteiras possíveis é igual ao coeficiente de:

$$X^{\left(\frac{(100-Sm\ n)}{\delta}\right)}$$

no polinômio:

$$\prod_{k=1}^n \sum_{i=0}^{expo(k)} x^i$$

Existe ainda:

$$\sum_{i=0}^{expo(k)} x^i = \frac{1 - x^{expo(k)+1}}{1 - x} \quad (1)$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{i} x^i \quad (2)$$

Com (1) e (2), é possível calcular o número de carteiras em tempo polinomial $O(n^2)$. Assim, pode-se obter valor razoável para delta, dados o número máximo de carteiras a se calcular e a capacidade computacional instalada.

Escolhido o valor para delta, podem-se gerar todas as carteiras utilizando “partição de inteiros”, armazenar suas composições em ativos e calcular seus respectivos valores de retorno e risco usando a análise estatística anterior.

É importante observar que o emprego da variável delta como percentuais de valor pode implicar quantidades fracionárias de ativos. A “programação inteira” poderia ser utilizada em cada instante de tempo para otimização e obtenção de valores

inteiros, mas sua complexidade computacional torna-se um problema do ponto de vista prático. No entanto, como os valores de riqueza utilizados em fundos reais são muito maiores que os preços unitários dos ativos, o erro obtido se torna insignificante na prática.

Construção da POD

Tendo sido calculados o retorno e o risco de cada uma das carteiras admissíveis, deve-se construir a POD da maneira descrita a seguir.

Os eixos do risco e do retorno devem ser divididos em intervalos. Cria-se, então, o plano risco-retorno subdividido em pequenas classes ξ_{ij} , que representariam as carteiras entre determinadas faixas de retorno e risco. Por exemplo, pode-se querer saber o número de carteiras (ou quais as carteiras) cujos valores de retorno estejam entre 0,7 e 0,72% e cujos valores de risco estejam entre 2,50 e 2,55%.

Deve-se, agora, construir uma superfície sobre o plano risco-retorno, sendo:

$$\iint f(\text{risco}, \text{retorno}) \times d(\text{risco}) \times d(\text{retorno})_{(\text{risco}, \text{retorno}) \in \xi_{ij}} = (\text{n}^\circ \text{ de elementos na classe } \xi_{ij}) / N_{\text{total}}.$$

Em outras palavras, constrói-se um histograma de frequência bidimensional, que serve para estimar a função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias risco e retorno da carteira composta de N ativos.

Exemplo prático de avaliação com POD

Suponha-se que o administrador de recursos deseje compor uma carteira de ações obedecendo às restrições evidenciadas na Tabela 1.

As restrições foram obtidas da composição teórica do Ibovespa, com variação de 10% em torno dos valores teóricos de participação de cada ação. Suponha-se que, em 1º de março de 2000, o administrador componha a carteira da Tabela 2, adotando a estratégia 1 (quantidades fixas) no período de 1º de março de 2000 a 25 de abril de 2000.

Tabela 1 – Ativos e restrições para formação das carteiras

Ação	Código	Percentagem mínima	Percentagem máxima
RCTB41	TELES RCTB	25	45
PETR4	PETROBRAS	0	18
RCTB31	TELES RCTB	0	18
TLPP4	TELESP	0	16
ELET6	ELETROBRAS	0	16
VALE5	VALE R DOCE	0	14
BBDC4	BRADESCO	0	13
BESP4	BANESPA	0	13
ELET3	ELETROBRAS	0	13
CMIG4	CEMIG	0	13
BBAS4	BRASIL	0	11
USIM5	USIMINAS	0	11
EMBR3	EMBRAER	0	11
ITAU4	ITAUBANCO	0	11

Tabela 2 – Carteira do administrador

Ação	Código	Percentagem
RCTB41	TELES RCTB	35
PETR4	PETROBRAS	5
RCTB31	TELES RCTB	10
TLPP4	TELESP	10
ELET6	ELETROBRAS	0
VALE5	VALE R DOCE	5
BBDC4	BRADESCO	5
BESP4	BANESPA	10
ELET3	ELETROBRAS	0
CMIG4	CEMIG	5
BBAS4	BRASIL	0
USIM5	USIMINAS	5
EMBR3	EMBRAER	5
ITAU4	ITAUBANCO	5

Com a série de preços dos ativos dessa carteira, calculam-se o risco e o retorno:

- retorno: $-0,3992\%$ ao dia (em média) ou $-13,4112\%$ no período;
- risco: $2,5401\%$ ao dia ou $15,2408\%$ no período.

Para avaliação do administrador, deve-se comparar seu desempenho com as oportunidades que estavam disponíveis na composição de sua carteira. Ou seja, deve-se utilizar a POD dos ativos com os quais o administrador estruturou sua carteira. Construindo essa POD, obtém-se a distribuição apresentada nas Figuras 1 e 2.

O volume V da POD compreendido em um elemento de área A do plano risco-retorno representa a probabilidade de construção, em 1º de março de 2000, da carteira com os ativos da Tabela 1 com valores de risco e retorno, em 25 de abril de 2000, dentro do intervalo delimitado por A .

Assim, a legenda do gráfico foi construída de modo a mostrar exatamente o volume V compreendido entre determinado elemento de área A do plano risco-retorno e a POD, fornecendo diretamente a probabilidade de se ter construído em 1º de março de 2000 uma carteira com os ativos apresentados na Tabela 1 e de se ter obtido em 25 de abril de 2000 o risco e o retorno que estejam dentro do intervalo delimitado por A .

Avaliação do administrador

Continuando com o exemplo da carteira anterior do administrador, é possível saber qual a probabilidade de outra carteira ter apresentado nível de risco abaixo do obtido por ela, porém com nível de retorno superior.

Para isso, basta obter o volume compreendido pela POD com as seguintes restrições de retorno e risco: $-0,3992\% \leq \text{retorno} < \infty$ e $0 \leq \text{risco} \leq 2,5401\%$.

Utilizando a POD gerada com os ativos da Tabela 1, obtém-se $V = 17,40\%$, o que significa que a probabilidade de o administrador ter construído, em 1º de março de 2000, uma carteira que apresentasse, em 25 de abril de 2000, menor nível de risco e maior nível de retorno que os de sua era de 17,40%, isto é, uma carteira efetivamente melhor que a dele. Graficamente, a região citada corresponde ao demonstrado nas Figuras 3 e 4.

Figura 1 – POD gerada das oportunidades da Tabela 1

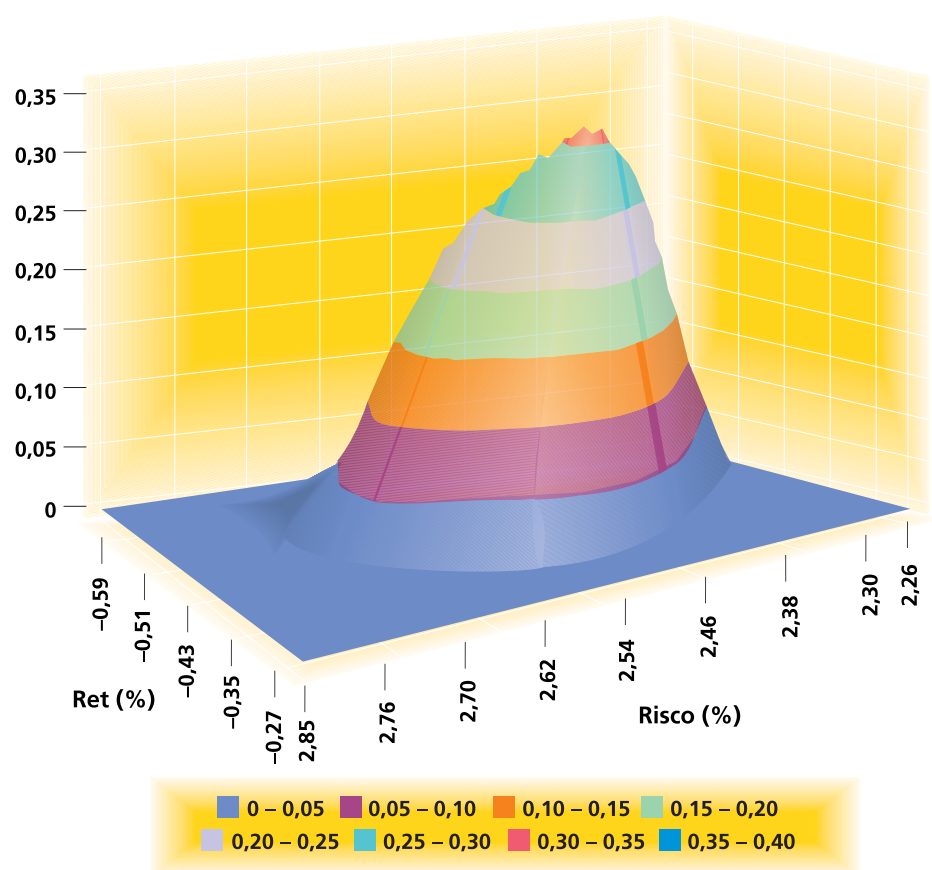


Figura 2 – Vista superior da POD com as curvas de nível da superfície

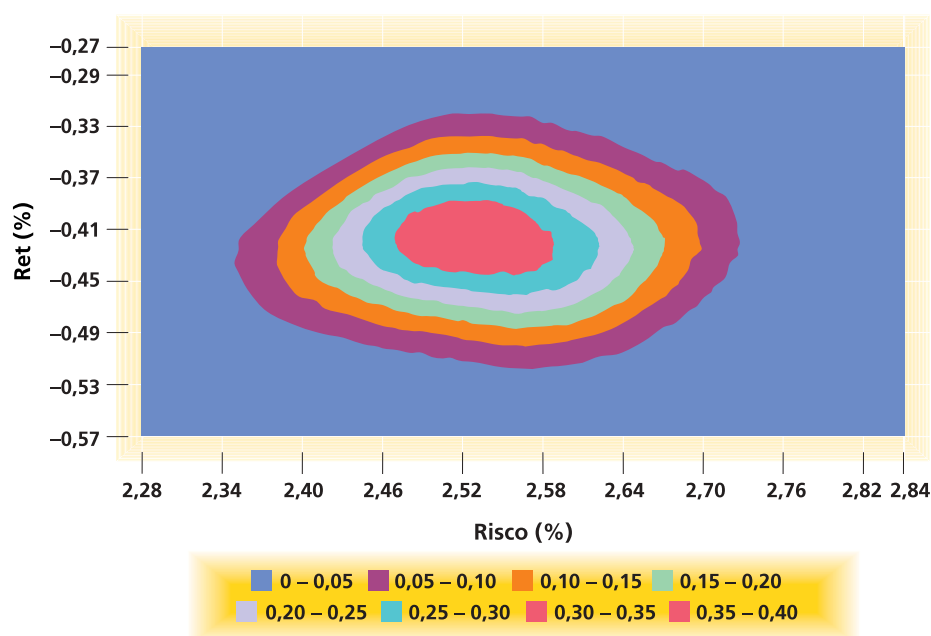


Figura 3 – Carteiras da POD com rendimento melhor que a do administrador

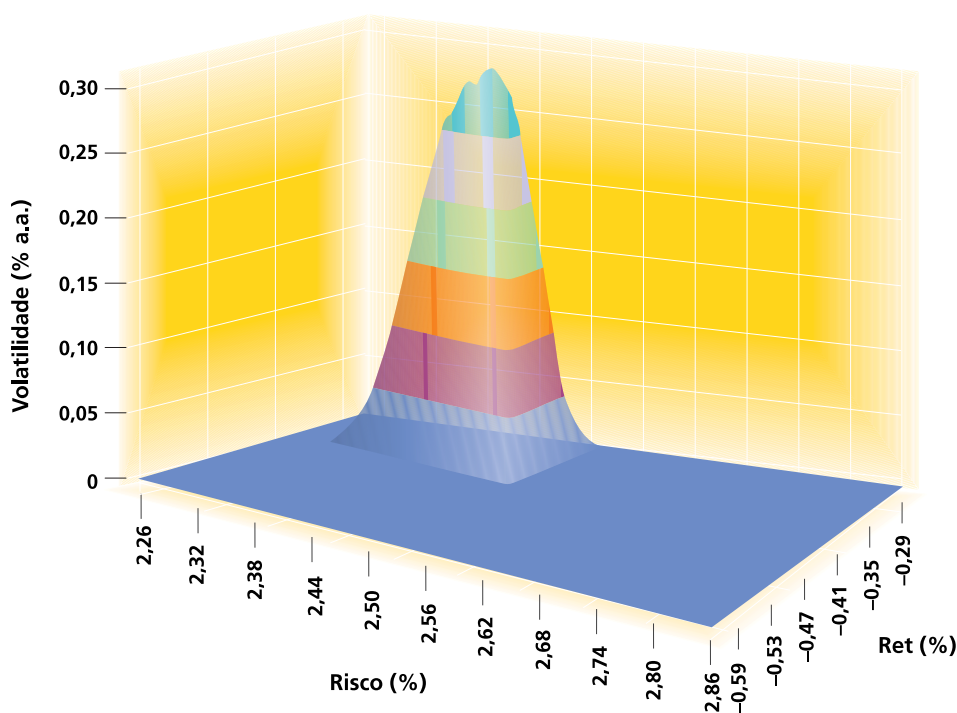
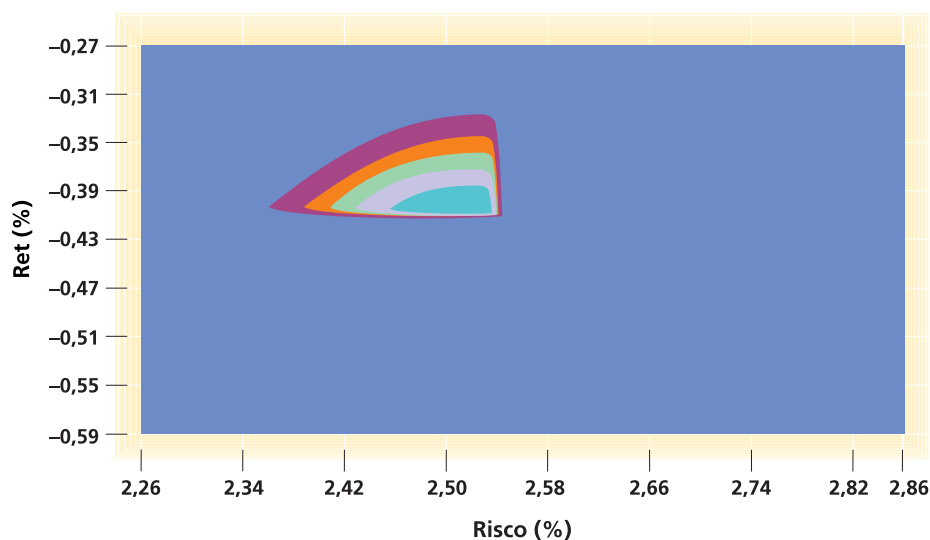


Figura 4 – Vista superior da Figura 3



Além disso, com a POD é possível calcular a probabilidade de geração de uma carteira pior que a sua, ou seja, uma carteira com maior risco e menor retorno que a sua. No exemplo anterior, essa probabilidade é de 31,93%.

Seja $\text{prob}(C)$ a probabilidade estimada pela POD para uma carteira C . Considerando-se o universo formado por carteiras piores e melhores que as do administrador, uma possível avaliação quantitativa do administrador seria a nota:

$$\left(\frac{\text{prob}(\text{carteira pior})}{\text{prob}(\text{carteira pior}) + \text{prob}(\text{carteira melhor})} \right) * 10$$

Assim, no exemplo anterior, a nota do administrador seria apenas razoável e igual a:

$$\left(\frac{31,93}{31,93 + 17,40} \right) * 10 \approx 6,5$$

Avaliação de carteira ótima

Na implementação da ferramenta computacional que constrói a POD, é possível armazenar as composições das carteiras geradas, e obter, por exemplo, as que estão dentro de determinados limites de retorno e risco, bem como as carteiras que atingem o retorno ou risco máximo ou mínimo. A Tabela 3 apresenta a composição da carteira que atingiu o retorno máximo no exemplo da POD anterior, com discretização delta = 5,36%.

Tabela 3 – Carteira com maior retorno, obtida pelo método

Ação	Código	Porcentagem
RCTB41	TELES RCTB	25,00
PETR4	PETROBRAS	16,08
RCTB31	TELES RCTB	16,08
TLPP4	TELESP	0,00
ELET6	ELETROBRAS	0,00
VALE5	VALE R DOCE	10,71
BBDC4	BRADESCO	0,00
BESP4	BANESPA	10,71
ELET3	ELETROBRAS	0,00
CMIG4	CEMIG	0,00
BBAS4	BRASIL	0,00
USIM5	USIMINAS	0,00
EMBR3	EMBRAER	10,71
ITAU4	ITAUBANCO	10,71

O retorno e o risco dessa carteira são:

- retorno: -0,2635% ao dia (em média) ou -9.0623% no período;
- risco: 2,5341% ao dia ou 15,2045% no período.

A nota dessa carteira, utilizando a POD, é:

$$\left(\frac{\text{prob}(\text{carteira pior})}{\text{prob}(\text{carteira pior}) + \text{prob}(\text{carteira melhor})} \right) * 10 = \left(\frac{50,32}{50,32 + 0} \right) * 10 = 10$$

Avaliação de carteiras com restrições de retorno e risco

Se o administrador do exemplo anterior pudesse apenas construir carteiras com nível de risco na faixa de $2,5\% \pm 0,15\%$, a análise de seu desempenho deveria ser feita apenas com as carteiras que atendessem a esse requisito. Dessa forma, é preciso descobrir qual era a probabilidade de, em 1º de março de 2000, ele ter construído uma carteira que apresentasse, em 25 de abril de 2000, maior nível de retorno que o da sua e nível de risco que se enquadrasse na faixa $2,5\% \pm 0,15\%$.

Utilizando a POD gerada com os ativos da Tabela 1 para determinar o volume compreendido entre a superfície da POD e a região do plano risco-retorno definida por $2,35\% \leq \text{risco} \leq 2,65\%$ e $-0,3992\% < \text{retorno} < \infty$, obtém-se $V = 30,02\%$.

Procedendo de forma análoga para determinar o volume compreendido entre a superfície da POD e a região do plano risco-retorno definida por $2,35\% \leq \text{risco} \leq 2,65\%$ e $\text{retorno} < -0,3992\%$, obtém-se: $V = 59,43\%$.

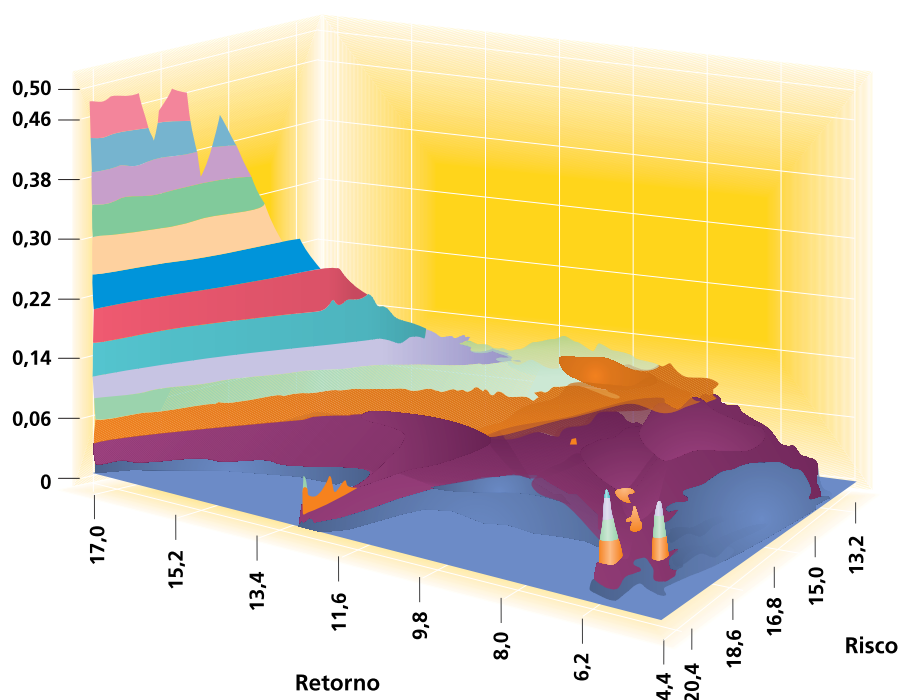
Considerando-se o universo das carteiras piores e melhores que as do administrador, sua nota corresponderia a uma nota apenas razoável e igual a:

$$\left(\frac{59,43}{59,43 + 30,02} \right) * 10 \approx 6,6$$

Outros exemplos

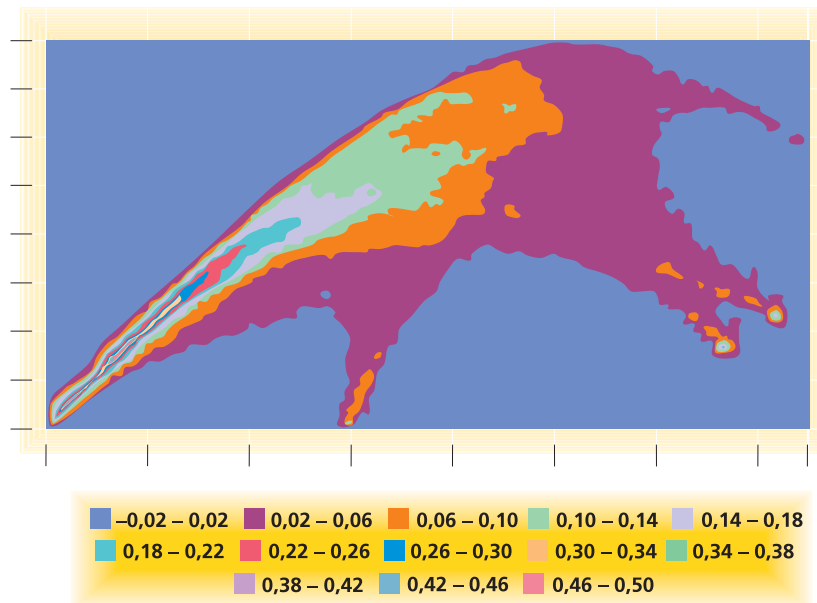
Além da fronteira eficiente e da região viável no plano risco-retorno, essa ferramenta possibilita visualizar a concentração de carteiras em determinadas regiões, como se pode verificar pelo exemplo abaixo, com carteiras de cinco ativos, em vista normal e superior. Dadas tais concentrações, é possível analisar a dificuldade em se atingir a fronteira eficiente, ou seja, a alocação ótima para a carteira.

Figura 5 – Exemplo de POD evidenciando a região viável de Markowitz



É importante observar que, nos exemplos anteriores, foram utilizadas restrições para cada ativo, mas essa ferramenta também possibilita impor restrições setoriais, como por exemplo, $BBDC4 + BBAS4 + BESP4 \leq 45\%$. Nesse caso, tratam-se os três ativos como um só e aplica-se a POD interna e externamente, sem maiores problemas computacionais.

Figura 6 – Vista superior da Figura 5, evidenciando a fronteira eficiente



Conclusão

Nos exemplos, observa-se que, com a aplicação do conceito de POD, é possível avaliar o administrador sem a necessidade de *benchmarks* externos, ou seja, avaliá-lo em relação ao conjunto de desempenhos que ele poderia ter obtido dadas as restrições de alocação de recursos.

Bibliografia

- STEVENS, D.; Surz, R.; Wimer, M. The importance of Investment Policy. *Journal of Investing*, 1999.
- SURZ, R. Portfolio Opportunity Distributions: An Innovation in Performance Evaluation. *Journal of Investing*, 1994.
- _____. *Global Performance Evaluation and Equity Style: Introducing Portfolio Opportunity Distributions*. Handbook of Equity Style Management. Frank Fabozzi Associates, 1997.
- _____. Portfolio Opportunity Distributions: A Solution to the Problems with Benchmarks and Peer Groups. *Journal of Performance Measurement*, 1996.
- ROSS, S. *Introduction to Probability Models*. New York, Press Inc., 1972.

Rudini Menezes Sampaio é doutorando em Ciência da Computação pelo IME-USP e consultor da MAPS Risk Management. E-mail: rudini@ime.usp.br.

Andre Cury Maiali, CFA, é gerente de Risco e Produtos da Votorantim Asset Management e doutorando em Finanças Matemáticas pela Poli-USP. E-mail: andre.maiali@vam.com.br.

Os autores agradecem os comentários de Afonso Campos Pinto e Sérgio Malacrida, da MAPS Risk; Marcos Eugênio da Silva, professor da FEA-USP; e José Carlos de Souza Santos, chefe do Instituto Educacional da BM&F. Eventuais erros cabem aos autores.